CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I. et II., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

On rappelle que pour une série $\sum_{k\geq 1} u_k$ convergente, le reste d'indice n, pour $n\in\mathbb{N}$, est le réel défini par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Partie I.

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $x\mapsto \ln(1+x)$.
2. Montrer alors que $\ln(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k}$.
3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{k\geq 1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k}$.
4. (a) Montrer que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right|\leq\frac{1}{n+1}$.

   (c) En déduire que $\ln(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\frac{1\times 3\cdots\times(2n-1)}{n2^{n+1}n!}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

   (b) Rappeler la formule de Stirling.

   (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\, dx$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{2n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

   (b) Montrer que f est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\, dx$.

4. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\, dx$.

   (a) En utilisant un changement de variable, montrer que J est convergente et que $I = J$.

   (b) En calculant $I + J$ trouver la valeur de I.

5. Donner, en le justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Partie III.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première et deuxième partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).
On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que la notation $u_n = \circ(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

   (a) Calculer U_n. Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{U_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \circ(R_n)$.

   (d) Conclure que $R_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0{,}1], \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

(c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$

(d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, \quad (1-\epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1+\epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall n \geq N, \quad (1-\epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq T_n \leq (1+\epsilon) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(d) Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement? Laquelle converge le moins rapidement? Justifier vos réponses.