CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

L'objet de ce problème est d'étudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax \qquad (E_a)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Etude de l'équation (E_a)

1. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.
   (a) Montrer que si $a \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0, 1]$.
   (b) Montrer que si $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.
   (c) Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.
   (d) Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.
2. Illuster sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0]$, $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $a = \frac{1}{e}$ et $a > \frac{1}{e}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$).

Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad \text{(R)}$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).
2. Soit φ une solution de (R). Montrer que :

$$\varphi(0) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0.$$

3. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.
   (a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) > 0$.
   (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n.$$

(c) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m .$$

(d) Déduire des questions précédentes que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}} .$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).

(f) Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x .$$

Partie III. Etude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X+n)^{n-1}.$$

1.(a) Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

(b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).$$

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).

Partie IV. Retour sur l'équation (E_a)

Dans cette partie on note α_a **la plus petite** solution, si elle existe, de l'équation (E_a).

1.(a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad (x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}$.

(b) Rappeler la formule de Stirling puis montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés, la série numérique $\sum_{n \geq 0} P_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leq \dfrac{1}{e}$.

2. Dans cette question on se fixe un réel a de $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ et on note F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n.$$

(a) Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Rappeler le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries.

(c) En utilisant les résultats de la partie III., montrer que F_a est solution de (R) et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x .$$

(d) Montrer que F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a^{'}(x) = aF_a(x+1).$$

(e) En calculant $F_a^{'}(0)$ de deux façons différentes, montrer que $F_a(1)$ est solution de (E_a).

3. On note G la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ par $G(a) = F_a(1)$.

(a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ et monotone sur $[0, \frac{1}{e}]$.

(b) Expliciter $G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right)$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ par la fonction G.

(c) Conclure que

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

4. Soit C un réel tel que $1 \leq C \leq e^{\frac{1}{e}}$. Montrer que l'équation $y^y = C$, d'inconnue $y > 0$, admet une unique solution y_0 et que

$$y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\ln(C))^n.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1142 – D'après documents fournis