Compte rendu correction épreuve MP

Le sujet est constitué de 5 exercices dans lesquels les concepteurs ont cherchés couvrir une bonne partie du programme. L'objectif était que les étudiants utilisent les notions essentielles des deux années de CPGE.

Plusieurs questions étaient des questions de cours, ce qui aurait dû sécuriser les candidats, bien qu'elles n'aient pas toujours été affichées en tant que telles.

Exercice 1.

Il est dommage que beaucoup de candidats semblent avoir fait l'impasse sur les probabilités.

Trop peu de copies justifient correctement la convergence d'une série géométrique de raison q. La dérivation de la série de terme général x^n est elle aussi trop rarement correctement justifiée.

Il est à noter que $\mathbb{P}(X = Y)$ se transforme souvent en $\mathbb{P}(X = Y = k)$ et amène donc à des résultats faux.

Exercice 2.

Il semble que la fonction ch soit inconnue de beaucoup de candidats. La justification de ch$\geqslant 1$ a souvent été très longue et fausse.

L'indication : « On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ » n'est pas suffisamment utilisée et les étudiants ne font pas toujours correctement le lien avec le chapitre Séries du programme.

Les théorèmes de convergence uniforme/normale sont trop rarement bien appliqués. Les critères de convergence d'intégrale sont souvent fantaisistes.

Exercice 3.

Il est incompréhensible que la question de cours sur la somme et le produit des racines d'une équation du second degré soit aussi mal traitée, il est inadmissible que les étudiants ne fassent pas les calculs pour obtenir les résultats attendus.

Les résultats sur les suites récurrentes linéaires sont souvent méconnus ou incomplets.

La suite de l'exercice a posé beaucoup de problème : confusion entre suite et terme général d'une suite, manipulation hasardeuse des quantificateurs, dimension infinie.

Rappelons que le Théorème : toute suite convergente est bornée est un résultat de cours et qu'il était inutile ici de le redémontrer : les étudiants qui ont tenté de le redémontré n'ont pas réussi à manipuler correctement les quantificateurs.

Les quelques notions de topologie utilisées à la fin de l'exercice sont plutôt bien connues mais nous notons un manque de rigueur conséquent dans leur utilisation.

Exercice 4.

Dans cet exercice sur les espaces euclidiens, seules les premières questions ont été correctement abordées, le reste est rarement traité.

Il est dommage que pour démontrer le caratère défini positif du produit scalaire $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ tous les arguments indispensables ne soient effectivement avancés.

On regrette que dans la question où $n = 2$, les calculs ne soient pas toujours menés à leur terme, ce qui aurait permis aux candidats de récupérer des points facilement.

Exercice 5.

Curieusement, cet exercice a été plutôt assez réussi.

On peut cependant y regretter à nouveau un manque général de rigueur. Peu d'étudiants pensent aux théorèmes standards du cours (convergence dominée par exemple) et se contentent d'inverser limite et intégrale.

Conclusion

Il nous semblait que le sujet permettait aux candidats d'utiliser les résultats du cours et quelques questions, plus fines, devaient permettre aux meilleurs de s'exprimer pleinement.

Or, il s'avère que des résultats élémentaires (somme et produit d'une équation du second degré par exemple) sont méconnus de trop de candidats, et les théorèmes classiques du programme sont souvent approximatifs, mal compris. Cela est très décevant.

Dans l'ensemble, nous constatons un grand manque de rigueur dans la rédaction : il ne suffit pas de dire « clairement, on a ... » pour effectuer une démonstration correcte. Rappelons qu'il est indispensable de vérifier toutes les hypothèses d'un théorème pour l'utiliser.

Nous avons trouvé les copies souvent mal présentées, sales, mal rédigées : rayures dans tous les sens, questions faites dans le désordre, phrases sans queue ni tête...
Le manque de professeur en présentiel depuis le mois de mars ainsi que les difficultés liées au confinement peuvent expliquer en partie ce constat.

* * * * * *

Sujet

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\, q^k$$

où $p \in]\,0, 1\,[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Exercice 2.

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose : $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$ où $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

1. Montrer que pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.1. Etudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.

3.2. Démontrer que la fonction φ est continue sur J.

4.

4.1. Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}}$.

On pourra utiliser un changement de variables.

4.2. En déduire l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 3.

Questions de cours

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note r_1 et r_2 les racines.

Donner sans démonstration les expressions de $\sigma_1 = r_1 + r_2$ et de $\sigma_2 = r_1 r_2$ à l'aide des coefficients a, b et c.

2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$

On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n.

On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1.

* * * * * *

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.

On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ S(x) = z, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ T(x) = y, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.

4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour S.

5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.

6. Etude de l'endomorphisme S.

Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

7. Etude de l'endomorphisme T.

On rappelle qu'une suite x est dans $\mathscr{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

7.1. Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$.

On pourra utiliser les questions de cours.

7.2. L'endomorphisme T est-il injectif ?

7.3. Déterminer $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $\mathrm{Ker}(T + 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.

7.4. Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.

8. On munit $\mathscr{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathscr{C}$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

Soit N l'application qui à tout élément x de $\mathscr{C}$, associe $N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.

8.1. Vérifier que pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe.

8.2. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathscr{C}$.

8.3. Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}, N)$. Est-elle continue ?

8.4. Prouver que dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.

8.5. Les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 4.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$,

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.

Dans la suite de l'exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Donner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.

3. On prend dans cette question $n = 2$.

Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.

4. On revient au cas général : $n \geqslant 2$ et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ non nul.

4.1. Déterminer le degré de L.

4.2. On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t)\,t^x\,\mathrm{d}t$.

4.2.1. Montrer que φ est une fonction rationnelle.

4.2.2. Déterminer les zéros et les pôles de φ. Donner pour chacun son ordre de multiplicité.

On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.

4.2.3. En déduire une expression de φ à une constante multiplicative près faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.

4.3. En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ, donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Exercice 5.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite ℓ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, 1]$ la fonction en escalier f_n par :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ \forall\, t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[,\ f_n(t) = w_k \quad \text{et} \quad f_n(1) = w_n$$

1. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Prouver que l'on a pour tout $t \in [0, 1[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

3. En déduire pour tout $t \in [0, 1]$, la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

4. Prouver alors que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k = \ell$.

* * * * * *