Compte rendu correction épreuve PSI

Le sujet est constitué de 4 exercices dans lesquels les concepteurs ont cherchés couvrir une bonne partie du programme. L'objectif était que les étudiants utilisent les notions essentielles des deux années de CPGE.

Plusieurs questions étaient des questions de cours, ce qui aurait dû sécuriser les candidats, bien qu'elles n'aient pas toujours été affichées en tant que telles.

Exercice 1.

Il s'agit d'un exercice d'analyse classique sur les différents types de convergence d'une suite (série) de fonctions.

Les notions de convergence normales et uniformes semblent dépasser nombre de candidats. La convergence normale est souvent assimilée à la convergence absolue. La majoration du reste d'une série alternée même si elle semble connue de la plupart des candidats, n'est pas toujours appliquée et utilisée correctement.

Certains justifient la divergence d'une série après majoration de son terme général par le terme général d'une série divergente.

On constate une grande confusion chez beaucoup de candidats entre fonction et nombre, entre série numérique et série de fonctions.

Enfin, il est fréquent de voir les étudiants additionner des équivalents au lieu d'utiliser les développements limités et des o.

Exercice 2.

Rappelons à tout le monde que la matrice nulle et la matrice identité sont diagonales et ne peuvent constituer un exemple pour la première question.

Il est encore une fois dommage que bon nombre d'étudiants ne connaissent pas les rudiments de probabilité. Cela les a lourdement pénalisés sur cet exercice.

Trop peu d'étudiants ont abordé la dernière question alors qu'il s'agissait, au début, d'une question de cours. Trop de candidats inventent des propriétés de la trace d'une matrice afin de résoudre la question.

Exercice 3.

Beaucoup d'étudiants n'hésitent pas à trouver un équivalent nul (oubli du cas $\lambda = 1$) et la continuité de la fonction à intégrer est rarement évoquée.

Le théorème fondamental de l'analyse reste très peu cité.

Lorsque f est périodique, montrer que la fonction φ qui à tout x réel associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante, a semblé poser problème, par exemple : changements de variable fantaisistes qui n'aboutissent pas.
La fin de la question 4 n'est quasiment jamais traitée.

La demande d'équivalent dans la question 5 semble encore une fois être d'une grande difficulté pour la plupart des candidats et le lien avec les questions précédentes totalement ignoré.

Exercice 4.

Dans ce petit exercice de géométrie euclidienne en dimension 2, on pouvait faire des dessins pour voir « ce qui se passait ». Il semble que beaucoup de candidats ont manipulé des calculs sans aucune réalité.

Rappelons que la décomposition canonique d'un trinôme du second degré peut souvent être efficace, à condition ici de savoir que $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$...

Conclusion

Il nous semblait que le sujet permettait aux candidats d'utiliser les résultats du cours et quelques questions, plus fines, devaient permettre aux meilleurs de s'exprimer pleinement.

Or, il s'avère que des résultats élémentaires (théorème fondamental de l'analyse, fonctions périodiques par exemple) sont méconnus de trop nombreux candidats et les théorèmes classiques du programme sont souvent approximatifs, mal compris. Cela est très décevant.

Dans l'ensemble, nous constatons un grand manque de rigueur dans la rédaction : il ne suffit pas de dire « clairement, on a ... » pour effectuer une démonstration correcte. Rappelons qu'il est indispensable de vérifier toutes les hypothèses d'un théorème pour l'utiliser.

Nous avons trouvé les copies souvent mal présentées, sales, mal rédigées : rayures dans tous les sens, questions faites dans le désordre, phrases sans queue ni tête...
Le manque de professeur en présentiel depuis le mois de mars ainsi que les difficultés liées au confinement peuvent expliquer en partie ce constat.

* * * * * *

Sujet

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [\,1, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β et deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

3.2. Exprimer l'évènement $[X_1 = X_2]$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}$.

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

4.1. Calculer $\mathbf{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\mathbf{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

4.2. On suppose dans cette question que A est symétrique réelle.

Démontrer que $\mathbf{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice A.

4.3. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Exercice 3.

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. $\boxed{\textbf{Dans cette question, et uniquement dans cette question, } f \text{ est la fonction } t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)}$

1.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

1.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

1.3. Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.

3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

3.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique ($T > 0$).

4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout x réel associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

4.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

5.4.1. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question **4.**

5.4.2. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4.

Soit E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]\,0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations : $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta)$, $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1$.

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune de ses variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.

4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]\,0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

* * * * * *