

E3A 2020 MP Physique – Chimie

Éléments de correction

Partie I – Modélisation d'un haut-parleur électrodynamique

I.1 – Équation électrique

Q1. Exprimer la force électromotrice e_{ind} induite par le champ magnétique extérieur en fonction de B_0 , ℓ et de la vitesse v de l'équipage mobile.

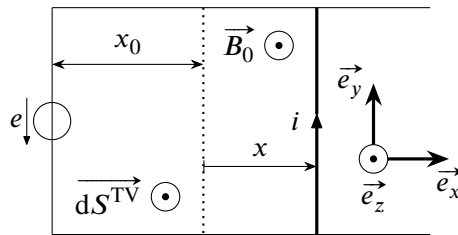


Figure a – Orientation du flux par application de la règle du tournevis. x_0 est la longueur à vide du ressort.

Voir la figure a. La loi de Faraday s'écrit $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt}$, où :

$$\Phi_{\text{ext}} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{B}_0 \cdot \overrightarrow{dS}_M^{\text{TV}} = \iint_{M \in \mathcal{S}} B_0 \vec{e}_z \cdot dS_M \vec{e}_z = B_0(x + x_0)\ell,$$

le flux Φ_{ext} étant orienté par la règle du tournevis donnée par l'orientation de i . On en déduit que :

$$e_{\text{ind}} = -B_0\ell \frac{d(x + x_0)}{dt} = -B_0\ell \frac{dx}{dt} = -B_0\ell v.$$

Q2. Dans cette question, on se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω . Établir une relation entre les amplitudes complexes \underline{E} , \underline{V} et \underline{I} (respectivement associées aux grandeurs sinusoïdales $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$, $v(t) = V \cos(\omega t + \varphi_v)$ et $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$) faisant intervenir les grandeurs L_e , R_e , B_0 , ℓ et ω . Dans la suite, on appelle cette relation l'« équation électrique » et on la note (E1).

La loi des mailles s'écrit, en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{E} = -\underline{E}_{\text{ind}} + R_e \underline{I} + j L_e \omega \underline{I},$$

soit :

$$\underline{E} = +B_0\ell \underline{V} + (R_e + j L_e \omega) \underline{I}. \quad (\text{E1})$$

I.2 – Équation mécanique

Q3. Exprimer la force de Laplace $\overrightarrow{f_{\text{Laplace}}}$ en fonction de i , ℓ et B_0 .

Par définition, pour un conducteur filiforme :

$$\overrightarrow{f_{\text{Laplace}}} = \int_{M \in \mathcal{B}} i d\ell \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B_0} = \int_{M \in \mathcal{B}} i d\ell M \overrightarrow{e}_y \wedge B_0 \overrightarrow{e}_z = i\ell B_0 \overrightarrow{e}_x.$$

Q4. On fait l'hypothèse que l'équipage mobile est en mouvement de translation rectiligne dans la direction de \overrightarrow{e}_x . Établir une équation différentielle vérifiée par l'abscisse x repérant la position de l'équipage mobile.

Dans le référentiel du bâti du haut-parleur supposé galiléen, la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'équipage mobile en translation rectiligne dans la direction de \overrightarrow{e}_x s'écrit :

$$M_{ms} \frac{d^2 x}{dt^2} \overrightarrow{e}_x = \overrightarrow{f_{\text{Laplace}}} + \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_{\text{rappel}}} + \overrightarrow{f_{\text{frottement}}} + \overrightarrow{0},$$

soit, en prenant en compte les expressions établies ou fournies et en projetant sur \overrightarrow{e}_x :

$$M_{ms} \frac{d^2 x}{dt^2} = i\ell B_0 - (P_0 + p_1)S + (P_0 + p_2)S - \frac{x}{C_{ms}} - R_{ms}v,$$

soit finalement :

$$M_{ms} \frac{d^2 x}{dt^2} + R_{ms} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C_{ms}} = i\ell B_0 + (p_2 - p_1)S.$$

I.3 – Masse fictive prenant en compte le rayonnement acoustique

Q5. Établir une relation entre les amplitudes complexes \underline{V} et \underline{I} faisant intervenir les grandeurs M_{ms} , C_{ms} , R_{ms} , B_0 , ℓ , S , $\underline{Z}_{a,1}$, $\underline{Z}_{a,2}$ et ω .

En régime sinusoïdal forcé, on a, en notation complexe :

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) = j\omega \underline{V} e^{j\omega t} \text{ et } \underline{x}(t) = \frac{\underline{V}}{j\omega}.$$

L'équation différentielle précédente se réécrit donc, en notation complexe :

$$j\omega M_{ms} \underline{V} + R_{ms} \underline{V} + \frac{\underline{V}}{j C_{ms} \omega} = \ell B_0 \underline{I} + (\underline{P}_2 - \underline{P}_1) S.$$

En introduisant les impédances acoustiques, on a alors :

$$j\omega M_{ms} \underline{V} + R_{ms} \underline{V} + \frac{\underline{V}}{j C_{ms} \omega} = \ell B_0 \underline{I} + (-\underline{Z}_{a,2} \underline{V} - \underline{Z}_{a,1} \underline{V}) S.$$

soit :

$$\left[j\omega M_{ms} + R_{ms} + \frac{1}{j C_{ms} \omega} + S(\underline{Z}_{a,1} + \underline{Z}_{a,2}) \right] \underline{V} = \ell B_0 \underline{I}.$$

Q6. Préciser l'unité de l'impédance acoustique \underline{Z}_a dans le Système international d'unités.

k étant homogène à l'inverse de r , l'unité de \underline{Z}_a est la même que celle de ρc , soit $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}) \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$, soit $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q7. On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer la masse volumique ρ de l'air à 25°C pour une pression égale à 1,0 bar. On donne la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On considère un volume mésoscopique $d\tau$ contenant une masse dm de gaz parfait. L'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$P_0 d\tau = \frac{dm}{M} RT, \text{ soit : } \rho = \frac{dm}{d\tau} = \frac{P_0 M}{RT}.$$

Numériquement, on a $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Q8. Par analogie avec les ondes électromagnétiques, donner l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ de surpression p . En déduire une relation entre k , ω et c . Dans la suite, on prend $k > 0$.

L'équation de d'Alembert est de la forme $\frac{\partial^2 \bullet}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2} = 0$. On a donc :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

En injectant une solution de type onde plane progressive sinusoïdale, de la forme $p(t) = P \cos(\omega t - kx)$, on a :

$$-(-k)^2 p(t) + \frac{1}{c^2} (\omega)^2 p(t) = 0.$$

Après simplification par p , on obtient la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

On prend $k = \frac{\omega}{c}$.

Q9. Montrer que l'impédance acoustique \underline{Z}_a peut se mettre sous la forme $\underline{Z}_a = R_a + j\omega M_a$. On exprimera, d'une part, R_a en fonction de ρ , ω , r et de c et, d'autre part, M_a en fonction de ρ et de r .

On élimine k dans l'expression de \underline{Z}_a :

$$\underline{Z}_a = \rho c \left[\frac{1}{2} (kr)^2 + j \frac{8kr}{3\pi} \right] = \frac{\rho c}{2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + j \frac{8\rho c r \omega}{3\pi c} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2c} + j \frac{8\rho r}{3\pi} \omega.$$

Par identification, $R_a = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2c}$ et $M_a = \frac{8\rho r}{3\pi}$.

Q10. Réécrire la relation entre les amplitudes complexes \underline{V} et \underline{I} en faisant intervenir, cette fois, les grandeurs M_{ms}^* , C_{ms} , R_{ms} , B_0 , ℓ et ω . Dans la suite, on appelle cette relation « l'équation mécanique » et on la note (E2).

On a montré que :

$$\left[j\omega M_{ms} + R_{ms} + \frac{1}{jC_{ms}\omega} + S(\underline{Z}_{a,1} + \underline{Z}_{a,2}) \right] \underline{V} = \ell B_0 \underline{I}.$$

Or :

$$S(\underline{Z}_{a,1} + \underline{Z}_{a,2}) = 2S\underline{Z}_a = 2S \left(R_a + j \frac{8\rho r}{3\pi} \omega \right) = 2SR_a + 2\pi r^2 j \frac{8\rho r}{3\pi} \omega = 2SR_a + j \frac{16\rho r^3}{3} \omega.$$

De plus, on néglige $R_a S$ devant R_{ms} . On a alors :

$$\left(j\omega M_{ms} + R_{ms} + \frac{1}{jC_{ms}\omega} + j \frac{16\rho r^3}{3} \omega \right) \underline{V} = \ell B_0 \underline{I}.$$

En posant $M_{ms}^* = M_{ms} + \frac{16\rho r^3}{3}$, on a finalement :

$$\left(jM_{ms}^* \omega + R_{ms} + \frac{1}{jC_{ms}\omega} \right) \underline{V} = \ell B_0 \underline{I}. \quad (\text{E2})$$

Partie II – Impédance électrique équivalente

II.1 – Expression de l'impédance électrique équivalente

Q11. En combinant les relations (E1) et (E2), montrer que le haut-parleur se comporte comme un dipôle d'impédance complexe \underline{Z} appelée « impédance électrique équivalente ». On écrira \underline{Z} sous la forme d'une somme d'une impédance complexe \underline{Z}_e traduisant les phénomènes électriques et d'une impédance complexe \underline{Z}_m traduisant les phénomènes mécaniques, avec :

$$\underline{Z}_m = \frac{1}{j\omega C_m^* + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{j\omega L_m}}.$$

On précisera en particulier les expressions des grandeurs suivantes :

- la capacité équivalente C_m^* traduisant l'inertie mécanique associée à la masse fictive M_{ms}^* ;
- la résistance électrique équivalente R_m traduisant le frottement fluide caractérisé par R_{ms} ;
- l'inductance équivalente L_m traduisant la force de rappel caractérisée par C_{ms} .

Par définition, $\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}}$. On cherche donc à éliminer \underline{V} des relations (E1) et (E2). La relation (E1) s'écrit :

$$\underline{E} = B_0 \ell \underline{V} + (R_e + jL_e \omega) \underline{I}$$

Or, d'après (E2) :

$$\underline{V} = \frac{\ell B_0 \underline{I}}{j M_{ms}^* \omega + R_{ms} + \frac{1}{j C_{ms} \omega}}.$$

On en déduit :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = R_e + j L_e \omega + \frac{(B_0 \ell)^2}{j M_{ms}^* \omega + R_{ms} + \frac{1}{j C_{ms} \omega}}.$$

Par identification, on a, d'une part :

$$\underline{Z}_e = R_e + j L_e \omega,$$

et, d'autre part :

$$C_m^* = \frac{M_{ms}^*}{(B_0 \ell)^2}, R_m = \frac{(B_0 \ell)^2}{R_{ms}} \text{ et } L_m = C_{ms} (B_0 \ell)^2.$$

Q12. En déduire le schéma électrique équivalent au haut-parleur en régime sinusoïdal forcé. On explicitera dans le schéma l'agencement des dipôles décrits par les grandeurs R_e , L_e , C_m^* , R_m et L_m .

Les dipôles d'impédances R_e , $j L_e \omega$ et \underline{Z}_m sont associés en série puisque leur impédances s'ajoutent. Les dipôles d'impédances R_m , $j L_m \omega$ et $\frac{1}{j C_m \omega}$ sont en dérivation car l'inverse de leur impédance équivalente est égale à la somme des inverses de leur impédance. On a donc le schéma de la figure b.

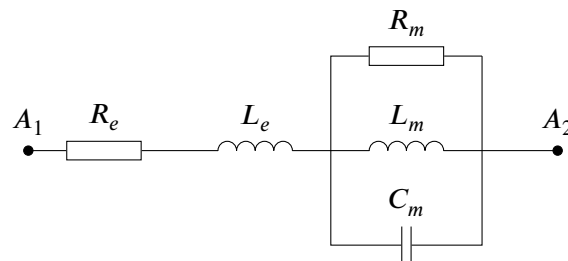


Figure b – Schéma électrocinétique équivalent au haut-parleur.

II.2 – Étude de l'impédance électrique équivalente

Q13. Compte tenu des valeurs numériques données dans la figure 1, que pensez-vous de la validité de cette approximation consistant à négliger la contribution de L_e dans \underline{Z}_e ?

En l'absence d'information sur la valeur de L_e pour une fréquence inférieure à 100 Hz, on prend la valeur de L_e à 1 kHz, soit $L_e = 1,83$ mH. La valeur de la résistance électrique vaut $2,9 \Omega$. On peut négliger la contribution de L_e devant celle de R_e à condition que $\frac{L_e 2\pi f}{R_e} \ll 1$, soit $f \ll \frac{R_e}{2\pi L_e}$, soit $f \ll 2,5 \cdot 10^2$ Hz. L'approximation est donc assez mauvaise pour les fréquences comprises entre 25 Hz et 100 Hz.

Q14. Exprimer \underline{Z} sous la forme :

$$\underline{Z} = R_e + \frac{R_m}{1 + jQ_{ms} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)},$$

où ω_s est la pulsation associée à la fréquence f_s apparaissant dans l'extrait de notice de la figure 1 et est appelée pulsation de résonance mécanique. On précisera les expressions de ω_s et Q_{ms} en fonction de L_m , C_m^* et R_m .

On néglige la contribution de L_e : $\underline{Z}_e = R_e$. On a alors :

$$\underline{Z} = R_e + \frac{1}{j\omega C_m^* + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega}} = R_e + \frac{R_m}{1 + j\omega R_m C_m^* \omega - \frac{jR_m}{L_m\omega}} = R_e + \frac{R_m}{1 + j \left(R_m C_m^* \omega - \frac{R_m}{L_m\omega} \right)}.$$

Par identification, $\frac{Q_{ms}}{\omega_s} = R_m C_m^*$ et $Q_{ms} \omega_s = \frac{R_m}{L_m}$. On en déduit :

$$Q_{ms} = R_m \sqrt{\frac{C_m^*}{L_m}} \text{ et } \omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m^*}}.$$

Q15. En déduire les expressions des parties réelle $\text{Re } \underline{Z}$ et imaginaire $\text{Im } \underline{Z}$ de l'impédance complexe \underline{Z} en fonction de R_e , R_m , ω_s , Q_{ms} et de ω .

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\underline{Z} = R_e + R_m \frac{1 - jQ_{ms} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)}{1 + Q_{ms}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2}.$$

Par identification, on a :

$$\text{Re } \underline{Z} = R_e + \frac{R_m}{1 + Q_{ms}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2}$$

et :

$$\text{Im } \underline{Z} = - \frac{R_m Q_{ms} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)}{1 + Q_{ms}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2}.$$

Q16. Montrer que $\text{Re } \underline{Z}$ présente un maximum pour une pulsation ω_{\max} . Préciser les expressions de ω_{\max} et de $(\text{Re } \underline{Z})_{\max} = \text{Re } \underline{Z}(\omega_{\max})$. Que vaut $\text{Im } \underline{Z}(\omega_{\max})$?

$\text{Re } \underline{Z}$ est la somme de deux grandeurs positives dont une seule dépend de ω . Elle est donc maximale lorsque cette dernière est maximale, c'est-à-dire lorsque $1 + Q_{ms}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2$ est minimal. Or, il s'agit de la somme de deux termes positifs, dont un seul dépend de ω et s'annule pour $\omega_{\max} = \omega_s$, valeur de la pulsation pour laquelle $\text{Re } Z$ est maximale. On a alors $(\text{Re } \underline{Z})_{\max} = \text{Re } \underline{Z}(\omega_s) = R_e$ et $\text{Im } \underline{Z}(\omega_s) = 0$.

Q17. On pose $\alpha = Q_{ms} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)$. Exprimer $\text{Im } \underline{Z}$ en fonction de α . Montrer que $\text{Im } \underline{Z}(\alpha)$ présente deux extrema. En déduire que $\text{Im } \underline{Z}(\omega)$ présente deux extrema pour les pulsations ω_1 et ω_2 , avec $\omega_2 > \omega_1$. Préciser les expressions de ω_1 et ω_2 . En déduire que $Q_{ms} = \frac{\omega_s}{\omega_2 - \omega_1}$.

On a :

$$\text{Im } \underline{Z} = - \frac{R_m Q_{ms} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)}{1 + Q_{ms}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2} = -R_m \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Dérivons par rapport à α :

$$\frac{d \text{Im } \underline{Z}}{d\alpha} = -R_m \frac{(1 + \alpha^2) - \alpha(2\alpha)}{(1 + \alpha^2)^2} = -R_m \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}.$$

La dérivée s'annule donc lorsque $1 - \alpha^2 = 0$, soit $\alpha = \pm 1$. On a alors :

$$Q_{ms} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right) = \pm 1,$$

soit :

$$\omega^2 \pm \frac{\omega}{Q_{ms}} \omega - \omega_s^2 = 0.$$

Les solutions de ces deux équations sont :

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{\omega_s}{Q_{ms}} \pm 2\omega_s \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_{ms}^2}} \right).$$

En ne conservant que les solutions positives, la dérivée s'annule donc pour les pulsations :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_s}{Q_{ms}} + 2\omega_s \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_{ms}^2}} \right) \text{ et } \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_s}{Q_{ms}} + 2\omega_s \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_{ms}^2}} \right).$$

On en déduit que :

$$\frac{\omega_s}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_s}{\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_s}{Q_{ms}} + 2\omega_s \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_{ms}^2}} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_s}{Q_{ms}} + 2\omega_s \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_{ms}^2}} \right)} = \frac{2\omega_s Q_{ms}}{2\omega_s} = Q_{ms}.$$

Partie III – Mesure de \underline{Z}

Q18. Exprimer le rapport $\frac{U_2}{U_1}$ en fonction de R et de \underline{Z} .

La loi d'Ohm s'écrit respectivement pour les deux dipôles :

$$\underline{U}_1 = R\underline{I} \text{ et } \underline{U}_2 = -\underline{Z}\underline{I}.$$

On en déduit :

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\underline{Z}\underline{I}}{R\underline{I}} = -\frac{\underline{Z}}{R}.$$

Q19. Expliciter et réaliser les mesures à effectuer à partir des courbes de la figure A permettant d'obtenir les points de mesures correspondant à $\text{Re } \underline{Z}$ et à $\text{Im } \underline{Z}$ à la fréquence 40 Hz. On annotera la figure A.

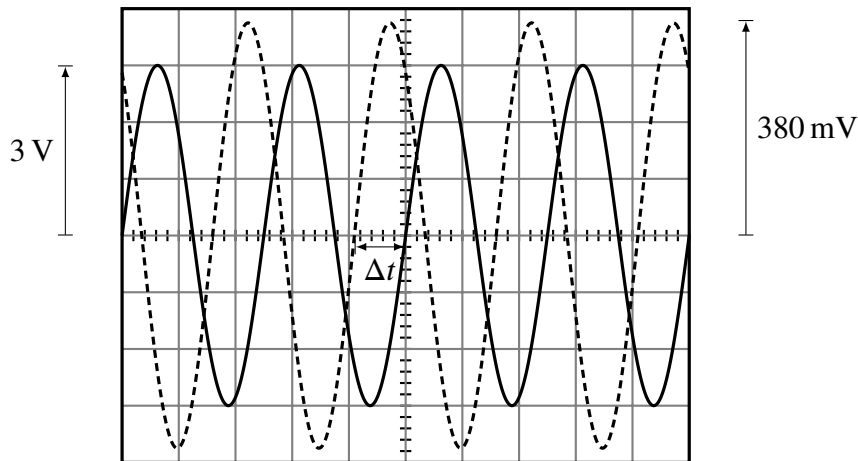


Figure c – Reproduction de l'écran de l'oscilloscope visualisant les tensions u_1 et u_2 à la fréquence 40 Hz. La vitesse de balayage vaut 10 ms/div. Les sensibilités verticales de la voie 1 et de la voie 2 valent respectivement 1 V/div et 100 mV/div. La voie 1 (u_1) est en traits pleins. La voie 2 (u_2) est en pointillés.

On a :

$$|\underline{Z}| = \left| -R \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = R \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = R \frac{U_2}{U_1},$$

et :

$$\arg \underline{Z} = \arg \left(-R \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right) = \arg(-R) + \arg \underline{U}_2 - \arg \underline{U}_1 = \pi + \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} [2\pi].$$

En outre :

$$\text{Re } \underline{Z} = |\underline{Z}| \cos(\arg \underline{Z}) = R \frac{U_2}{U_1} \cos(\pi + \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}) = -R \frac{U_2}{U_1} \cos(\varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}),$$

et :

$$\text{Im } \underline{Z} = |\underline{Z}| \sin(\arg \underline{Z}) = R \frac{U_2}{U_1} \sin(\pi + \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}) = -R \frac{U_2}{U_1} \sin(\varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}).$$

Il faut donc mesurer l'amplitude des deux signaux :

$$U_1 = 3 \text{ V et } U_2 = 3,8 \times 10 \cdot 10^{-3} = 380 \text{ mV.}$$

Il faut aussi mesurer leur déphasage :

$$\varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = 2\pi\Delta t f = 2\pi \times 9 \cdot 10^{-3} \times 40 = 2,3 \text{ rad.}$$

On en déduit :

$$\text{Re } \underline{Z}(40 \text{ Hz}) = -100 \times \frac{380 \cdot 10^{-3}}{3} \cos(2,3) = 8,5 \Omega,$$

et :

$$\text{Im } \underline{Z}(40 \text{ Hz}) = -100 \times \frac{380 \cdot 10^{-3}}{3} \sin(2,3) = -9,5 \Omega.$$

III.1 – Mesure de R_e

Q20. Où peut-on lire la valeur de R_e sur les graphes de la figure B du cahier-réponses ? Est-elle compatible avec ce qui est annoncé par le fabricant (voir la figure 1) ? Comment pourrait-on mesurer R_e plus simplement au laboratoire ?

Pour $f \ll f_s$, on a $\underline{Z} \simeq R_e$. On peut donc lire la valeur à fréquence nulle : $R_e = \text{Re } \underline{Z}(0 \text{ Hz}) = 3,5 \Omega$. Cette valeur est voisine de la valeur annoncée par le constructeur ($2,9 \Omega$).

On pourrait mesurer plus simplement R_e en branchant un ohmmètre aux bornes du haut-parleur.

III.2 – Mesures de f_s et de Q_{ms}

Q21. Déterminer graphiquement les valeurs de f_s et Q_{ms} à l'aide de la figure B du cahier-réponses. On annotera soigneusement la figure B.

La fréquence f_s correspond au maximum de $\text{Re } \underline{Z}$. On trouve $f_s = 31 \text{ Hz}$. On détermine les fréquences f_1 et f_2 correspondant aux extrema de $\text{Im } \underline{Z}$: $f_1 = 27,5 \text{ Hz}$ et $f_2 = 35 \text{ Hz}$. On en déduit Q_{ms} :

$$Q_{ms} = \frac{f_s}{f_2 - f_1} = \frac{31}{35 - 27,5} = 4,1 \cdot$$

Partie IV – Mesure de $|\underline{X}|$

Q22. Sachant que f restera inférieure à 2 kHz, justifier le choix de la valeur de R' . On pourra s'appuyer sur l'extrait de notice reproduit dans la figure 6.

L'amplitude complexe de l'intensité s'écrit :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R' + \underline{Z}}.$$

Or, d'après la notice $|\underline{Z}| \ll R'$ pour $f < 2 \text{ kHz}$. Dans ces conditions, on a donc approximativement :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R'},$$

soit :

$$|\underline{I}| \simeq I_0, \text{ avec } I_0 = \frac{|U|}{R} = \frac{U}{R}.$$

Q23. En considérant que $|\underline{I}|$ est constante et égale à I_0 , exprimer l'amplitude $|\underline{X}|$ de x .

On a :

$$\underline{X} = \frac{K\underline{I}}{1 + j \frac{\omega}{Q_{ms}\omega_s} - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2}.$$

On en déduit :

$$|\underline{X}| = \left| \frac{K\underline{I}}{1 + j \frac{\omega}{Q_{ms}\omega_s} - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2} \right| \simeq \frac{K I_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q_{ms}\omega_s}\right)^2}}.$$

Q24. Établir l'expression de la différence de marche δ pour un rayon arrivant sur la lame d'air équivalente sous incidence β . On l'exprimera en fonction de d et de β .

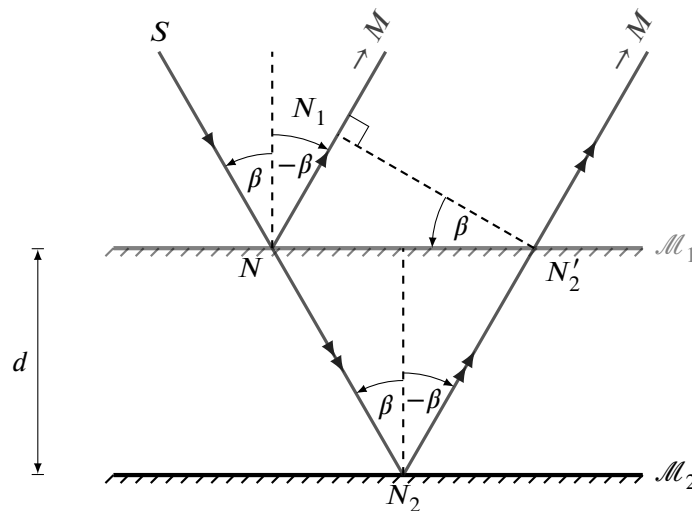


Figure d – Schéma introduisant les notations nécessaires au calcul de la différence de marche.

On a (voir la figure d) :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = [(SN)_2 + (NN_2) + (N_2N'_2) + (N'_2M)] - [(SN)_1 + (NN_1) + (N_1M)],$$

soit, d'après le théorème de Malus :

$$\delta = 2(NN_2) - (NN_1) = 2NN_2 - NN_1.$$

Or, $NN_2 = \frac{d}{\cos \beta}$ et :

$$NN_1 = NN'_2 \sin \beta = (2d \tan \beta) \sin \beta = 2d \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}.$$

Finalemment :

$$\delta = 2 \frac{d}{\cos \beta} - 2d \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2d \cos \beta.$$

Q25. Établir la formule de Fresnel reliant l'éclairement \hat{E} à la différence de marche δ sous incidence normale, dans le cas de la superposition de deux ondes de même amplitude. On notera \hat{E}_0 l'éclairement maximal.

On note $\underline{a}_1(M, t) = \underline{a}_0 e^{j[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(SM)_1]}$ et $\underline{a}_2(M, t) = \underline{a}_0 e^{j[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2]}$ les représentations complexes des signaux correspondant aux deux chemins optiques. En M , les amplitudes s'ajoutent :

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_1(M, t) + \underline{a}_2(M, t),$$

soit :

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_0 e^{j[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2]} \left(1 + e^{j \frac{2\pi}{\lambda} [(SM)_2 - (SM)_1]} \right) = \underline{a}_0 e^{j[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2]} \left(1 + e^{j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right).$$

L'éclairement est proportionnel à la valeur moyenne de $a(t)$:

$$\hat{E} = k \underline{a} \underline{a}^* = k \left[\underline{a}_0 e^{j[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2]} \left(1 + e^{j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right) \right] \left[\underline{a}_0^* e^{-j[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2]} \left(1 + e^{-j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right) \right],$$

soit, avec sous incidence normale $\delta = 2d$:

$$\hat{E} = k |\underline{a}|^2 \left(1 + e^{j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} + e^{-j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} + 1 \right) = 2k |\underline{a}|^2 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) \right].$$

On note $\hat{E}_0 = 4k |\underline{a}|^2$ l'éclairement maximale. On retrouve la formule de Fresnel :

$$\hat{E} = \frac{\hat{E}_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) \right].$$

Q26. Montrer qu'il est possible d'écrire l'éclairement sous la forme approchée suivante :

$$\hat{E}(t) \simeq Ax(t) + B,$$

où A et B sont des constantes que l'on exprimera en fonction de \hat{E}_0 , λ et d_0 .

L'éclairement s'écrit :

$$\hat{E} = \frac{\hat{E}_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi d_0}{\lambda} + \frac{4\pi x}{\lambda} \right) \right],$$

soit :

$$\hat{E} = \frac{\hat{E}_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi d_0}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{4\pi x}{\lambda} \right) - \sin \left(\frac{4\pi d_0}{\lambda} \right) \sin \left(\frac{4\pi x}{\lambda} \right) \right].$$

On lit $X_{\max} = 14$ mm. x est donc majoré par $\frac{X_{\max}}{60} \ll \lambda$. On peut donc écrire l'éclairement de

la manière approchée suivante :

$$\dot{E} \simeq \frac{\dot{E}_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi d_0}{\lambda}\right) - \sin\left(\frac{4\pi d_0}{\lambda}\right) \frac{4\pi x}{\lambda} \right].$$

Par identification :

$$A = -\frac{\dot{E}_0}{2} \sin\left(\frac{4\pi d_0}{\lambda}\right) \frac{4\pi}{\lambda} \text{ et } B = \frac{\dot{E}_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi d_0}{\lambda}\right) \right].$$

Q27. Comment doit-on ajuster la valeur de d_0 afin d'améliorer la sensibilité du dispositif ? Calculer la valeur minimale $d_{0,\min}$ de d_0 vérifiant cette condition.

Il faut que A soit le plus grand possible, c'est-à-dire $\sin\left(\frac{4\pi d_0}{\lambda}\right) = 1$, soit :

$$\frac{4\pi d_0}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2p\pi,$$

soit :

$$d_0 = \lambda \left(\frac{1}{8} + \frac{p}{2} \right),$$

avec $p \in \mathbb{Z}$. La valeur minimale de d_0 est donc :

$$d_{0,\min} = \frac{\lambda}{8} = 0,35 \text{ cm.}$$

Q28. Est-il possible de déterminer graphiquement les valeurs de f_s et Q_{ms} à partir du graphe de la figure C ? Justifier.

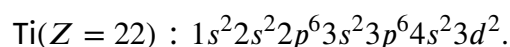
Il s'agit d'une résonance de type passe-bas du premier ordre. La fréquence de résonance n'est pas donc strictement égale à f_s . Pour déterminer précisément la valeur de f_s , il faudrait avoir l'information sur le déphasage de x par rapport au signal excitateur : f_s correspondrait alors à un déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$ entre les deux grandeurs.

Néanmoins, étant donné la valeur attendue de Q_{ms} , de l'ordre de 4, on peut considérer que la fréquence de résonance est proche de la fréquence propre. Aussi mesure-t-on $f_s = 33 \text{ Hz}$.

Partie I – Généralités et extraction

Q29. Le numéro atomique de l'élément titane est $Z = 22$. Donner la configuration électronique de l'atome de titane dans son état fondamental. Préciser quels sont les électrons de valence et ceux de cœur. Citer deux ions susceptibles de se former.

La configuration électronique de l'atome de titane dans son état fondamental s'écrit :



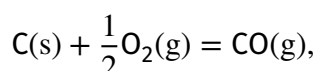
Les électrons de valence font partie des sous-couches $4s$ et $3d$. Les autres électrons forment les électrons de cœur. Parmi les ions pouvant se former, citons Ti^{3+} et Ti^{4+} .

Q30. Préciser la position de l'élément dans la classification périodique : ligne et colonne.

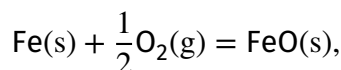
La dernière sous-couche s peuplée est la sous-couche $4s$: le titane se trouve à la quatrième ligne de la classification périodique. En outre, il y a deux électrons sur la sous-couche $3d$. Le titane se trouve donc dans la quatrième colonne (deux colonnes pour la sous-couche $4s$ complète et deux colonnes pour les deux électrons de la sous-couche $3d$).

Q31. Écrire les réactions standard de formation du monoxyde de carbone $\text{CO}(\text{g})$, de l'oxyde de fer $\text{FeO}(\text{s})$ et du dioxyde de titane $\text{TiO}_2(\text{s})$.

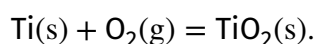
Les réactions standard de formation d'une espèce s'écrivent en partant des éléments dans leur état standard à la température considérée. Notons que l'état standard de l'oxygène est le dioxygène. Le nombre stœchiométrique associé à l'espèce doit être égal à un. On a alors, pour le monoxyde de carbone :



puis, pour l'oxyde de fer :



et, enfin, pour le dioxyde de titane :



Q32. Exprimer en fonction des données puis calculer l'enthalpie standard de la réaction (1).

D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H_1^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{CO}(\text{g})) + \Delta_f H^\circ(\text{Fe}(\text{s})) - \Delta_f H^\circ(\text{C}(\text{s})) - \Delta_f H^\circ(\text{FeO}(\text{s})).$$

Numériquement, on a :

$$\Delta_r H_1^\circ = 1,62 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} = 1,62 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Q33. Exprimer en fonction des données puis calculer l'entropie standard de la réaction (1).

On a :

$$\Delta_r S_1^\circ = S^\circ(\text{CO}(\text{g})) + S^\circ(\text{Fe}(\text{s})) - S^\circ(\text{C}(\text{s})) - S^\circ(\text{FeO}(\text{s})).$$

Numériquement, on a :

$$\Delta_r S_1^\circ = 1,52 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Q34. Calculer l'enthalpie libre standard de la réaction (1) et la constante d'équilibre à la température $T = 1300 \text{ K}$.

On a :

$$\Delta_r G_1^\circ = \Delta_r H_1^\circ - T \Delta_r S_1^\circ.$$

On en déduit :

$$\Delta_r G_1^\circ = -3,67 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

En outre :

$$K_1^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G_1^\circ}{RT}\right).$$

Numériquement, on a :

$$K_1^\circ = 29,9.$$

Q35. Déterminer le nombre de degrés de liberté de l'équilibre chimique associé à la réaction (1) en justifiant la réponse. Quel serait l'effet d'une hausse de la température sur l'équilibre de la réaction (1)? Pourquoi ne travaille-t-on pas à une température plus élevée?

Dénombrons le nombre de paramètres intensifs nécessaires à la description de l'équilibre chimique associé à la réaction (1). Pour cela, on dénombre :

- la pression p ;
- la température T ;
- les paramètres intensifs décrivant les phases (on choisit la fraction molaire) : $x_{C(s)}$, $x_{FeO(s)}$, $x_{CO(g)}$ et $x_{Fe(s)}$.

Il y a donc six paramètres intensifs nécessaires. Ces paramètres ne sont pas indépendants. Il y a, d'une part, les relations aux sein des phases :

$$x_{C(s)} = 1, x_{FeO(s)} = 1, x_{CO(g)} = 1 \text{ et } x_{Fe(s)} = 1.$$

Il y a, d'autre part, la relation définissant l'équilibre chimique :

$$K_1^\circ = \frac{p}{p^\circ}.$$

Cela fait cinq relations. Il y a donc $6 - 5 = 1$ degrés de liberté. Expérimentalement, la température est fixée, ce qui fait un nombre de degrés de liberté « expérimental » égal à 0.

Le loi de Van't Hoff s'écrit :

$$\frac{d}{dT} \ln K_1^\circ = \frac{\Delta_r H_1^\circ}{RT^2}.$$

Or, $\Delta_r H_1^\circ > 0$, ce qui signifie que K_1° augmente quand T augmente, ce qui rendrait la réaction plus favorable à l'apparition des produits. Le choix de la température est sans doute le fruit d'un compromis entre efficacité thermodynamique (température la plus élevée) et coût. On peut aussi remarquer qu'à température plus élevée, il risque de changement d'état.

Q36. Calculer la constante d'équilibre à la température $T = 1300$ K pour la réaction (2) en appliquant le même raisonnement que précédemment. Conclure sur la pertinence du mode opératoire.

Par un raisonnement analogue au précédent, on a :

$$\Delta_r H_2^\circ = \Delta_f H^\circ(CO(g)) + \frac{1}{2} \Delta_f H^\circ(Ti(s)) - \Delta_f H^\circ(C(s)) - \frac{1}{2} \Delta_f H^\circ(TiO_2(s)) = 3,62 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1},$$

puis :

$$\Delta_r S_2^\circ = S^\circ(\text{CO(g)}) + \frac{1}{2}S^\circ(\text{Ti(s)}) - S^\circ(\text{C(s)}) - \frac{1}{2}S^\circ(\text{TiO}_2\text{(s)}) = 1,82 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On en déduit :

$$\Delta_r G_2^\circ = \Delta_r H_2^\circ - T \Delta_r S_2^\circ = 1,25 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Ainsi :

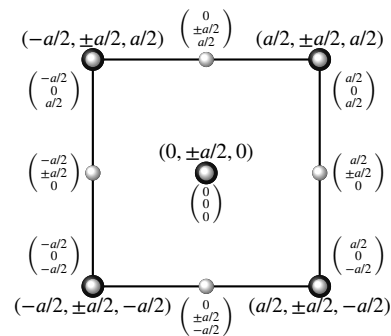
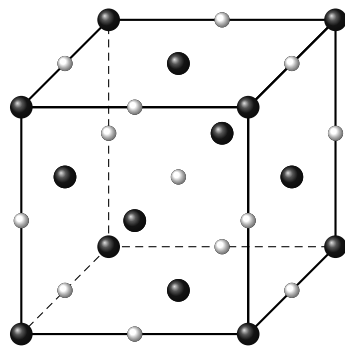
$$K_2^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G_2^\circ}{RT}\right) = 9,54 \cdot 10^{-6}.$$

On constate que $K_2^\circ \ll K_1^\circ$, ce qui justifie la pertinence du mode opératoire.

Partie II – Applications des alliages du titane dans l'industrie

II.1 – Étude cristallographique du nitrure de titane NTi

Q37. Compléter, sur les Figures D et E du cahier-réponses, la maille élémentaire de NTi en perspective puis en projection cotée sur un plan de face.



Q38. Déterminer la population en explicitant le calcul et vérifier la stœchiométrie du nitrure de titane.

Il y a un atome de titane à chaque sommet du cube (il y en a huit) qui est partagé entre huit mailles. Il y a un atome de titane au centre de chaque face du cube (il y en a six) qui est partagé entre deux mailles. On a donc :

$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ atomes de titane par maille.}$$

Il y a un site octaédrique au centre de la maille (en propre). Il y a un site octaédrique au milieu de chaque arête du cube (il y en a douze) qui est partagé entre quatre mailles. On a donc :

$$1 \times 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4 \text{ atomes d'azote par maille.}$$

Les deux atomes sont donc en proportions identiques dans la maille, ce qui justifie la stœchiométrie de la formule du cristal N_4Ti_4 , soit plus simplement NTi.

Q39. La masse volumique du nitrure de titane est $\rho = 5,24 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Exprimer puis calculer le paramètre de la maille, a .

Par définition de la masse volumique :

$$\rho = \frac{m_{\text{matière dans une maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4m_{\text{un motif de NTi}}}{a^3} = \frac{4M}{a^3 \mathcal{N}_A}$$

On en déduit :

$$a = \sqrt[3]{\frac{4M}{\rho \mathcal{N}_A}} = 4,28 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

Q40. Exprimer le rayon de l'atome de titane en fonction du paramètre de maille. Faire l'application numérique.

Les atomes de titane sont tangents le long de la diagonale d'une face du cube :

$$4R(\text{Ti}) = a\sqrt{2},$$

soit :

$$R(\text{Ti}) = \frac{a}{2\sqrt{2}} = 1,51 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

Q41. Exprimer le rayon R_o d'un site octaédrique en fonction du paramètre de maille. Vérifier l'habitabilité pour l'atome d'azote.

Un atome de titane et un site octaédrique sont tangents selon l'arête du cube :

$$R(\text{Ti}) + R_o = \frac{a}{2}.$$

Or, $R(\text{Ti}) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. On en déduit :

$$R_o = \frac{a}{2} - \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 6,27 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

On constate que $R_o > R(\text{Ni})$: les sites octaédriques peuvent donc accueillir un atome d'azote.

II.2 – Utilisation du dioxyde de titane comme catalyseur

Q42. À l'aide des données rassemblées dans le tableau 2, vérifier que cette réaction est compatible avec une cinétique d'ordre un.

On fait l'hypothèse d'une réaction d'ordre un. On a alors, d'une part, $v = k[P] = kC$ et, d'autre part, $v = -\frac{dC}{dt}$. On a alors :

$$\frac{dC}{dt} + kC = 0.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$C(t) = C_0 e^{-kt},$$

où C_0 est la concentration initiale en pesticide. On a alors :

$$\ln C(t) = \ln C_0 - kt.$$

On réalise une régression linéaire à l'aide du nuage de points de coordonnées $(t, \ln C)$. On observe qualitativement que les points sont alignés. Cela confirme l'hypothèse initiale.

Q43. Donner la valeur numérique de la constante de vitesse k . L'unité de temps sera donnée en heure.

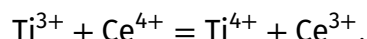
La valeur absolue du coefficient directeur de la droite de régression donne la valeur de k . On trouve :

$$k = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ h}^{-1}.$$

II.3 – Étude du catalyseur Ziegler-Natta

Q44. Donner l'équation support de la réaction de titrage.

Il s'agit d'une réaction d'oxydo-réduction entre les ions Ti^{3+} et les ions Ce^{4+} :



Q45. Exprimer puis calculer la concentration en ions titane (III) C_1 en fonction de C , E et V_E .

À l'équivalence, les réactifs ont été versés dans les proportions stœchiométriques. On a donc :

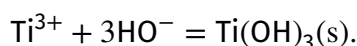
$$n_1 = n_{\text{Ce}^{4+} \text{ versé à l'équivalence}}, \text{ soit : } C_1 E = C V_E.$$

On a alors :

$$C_1 = \frac{C V_E}{E} = 1,2 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Q46. Les ions titane (III) forment un précipité d'hydroxyde de titane (III), $\text{Ti}(\text{OH})_3(\text{s})$. Déterminer le pH de précipitation de cet hydroxyde dans la solution (S).

L'équation de la réaction de précipitation s'écrit :



À la limite de précipitation, le système se trouve à l'équilibre chimique. On a donc :

$$[\text{Ti}^{3+}][\text{HO}^-]^3 = K_s c^{04}.$$

À la limite de précipitation, seul un grain de $\text{Ti}(\text{OH})_3(\text{s})$ est formé. Aussi, dans l'état final, $[\text{Ti}^{3+}] \simeq C_1$. En outre, l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau permet de lier les concentrations en ions hydroxyde et en ions oxonium :

$$[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = K_e c^{02}.$$

On a alors :

$$C_1 \left(\frac{K_e c^{O_2}}{[H_3O^+]} \right)^3 = K_s c^{O_4},$$

soit :

$$[H_3O^+] = K_e \sqrt[3]{\frac{C_1 c^{O_2}}{K_s}}.$$

Finalement, le pH de précipitation s'écrit :

$$pH = -\log[H_3O^+] = pK_e + \frac{1}{3}(pC_1 - pK_s) = 1,6.$$

FIN du corrigé