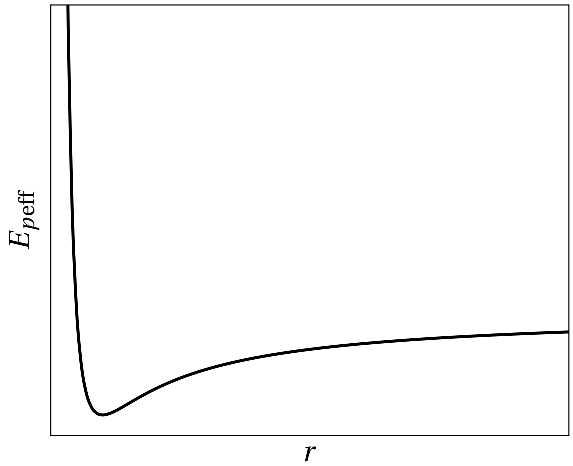
Corrigé e3a-polytech

PC physique 2020

Q1 - $\vec{F} = -G\dfrac{M_T m}{r^2}\vec{u}_r$.

Q2 - a) Le moment cinétique $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ est constant, le vecteur $\vec{u}_z$ perpendiculaire à la trajectoire est constant : la plan de l'orbite est fixe.
b) La force dérive d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ est donc conservative.
c) Comme $L = mC$, on a $C = r^2\dot{\theta}$. On a :
$E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \dfrac{GMm}{r}$
$E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{GMm}{r}$.
On obtient $A = GM_T m$ et $B = \dfrac{mC^2}{2}$.

Q3 - Il s'agit de l'énergie potentielle effective. Par dérivation, on trouve $r_0 = \dfrac{2B}{A} = \dfrac{C^2}{GM_T}$. C'est le rayon de la trajectoire circulaire de constante des aires C. $r_0 = 2{,}65 \times 10^4\,\text{km}$.



Q4 - On se sert de la troisième loi de Kepler pour trouver $T = 12\,\text{h}$ soit un demi jour sidéral.

Q5 - Sur l'orbite circulaire, $m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GM_T m}{r^2}$ d'où $E_{m1} = -\dfrac{GM_T m}{2(R_T + h)} = -2 \times 10^{10}\,\text{J}$.

Q6 - E_{m1} est **supérieure** à E_{m0} quelle que soit la latitude λ. Il faut donc fournir de l'énergie à la fusée. La latitude optimale, qui maximise l'énergie mécanique au sol, est $\lambda = 0$ ce qui correspond à l'équateur.

Q7 - Sur l'orbite de transfert, $2a = 2R_T + h + h'$ d'où $E_{m12} = -9{,}25\,\text{GJ}$.

Q8 - L'énergie potentielle est constante, seule l'énergie cinétique varie : $E_{m12} - E_{m1} = \frac{1}{2} m \left((v + \Delta V_1)^2 - v^2 \right)$ avec $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = 7{,}1 \times 10^3 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. On en déduit $\Delta V_1 = 1{,}7 \times 10^3 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Q9 - Durée de transfert : on utilise la troisième loi de Kepler pour déterminer la moitié de la période. On obtient $\tau = 3$ h 8 min.

Q10 - Le plan de l'orbite géostationnaire, circulaire, est le plan équatorial. La période de rotation est la durée du jour $T_j = 24\,\mathrm{h}$. La troisième loi de Kepler fournit le rayon de cette orbite : $r = \left(\frac{T_j^2 G M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3}$. L'altitude est alors $h = r - R_T = 3{,}59 \times 10^4\,\mathrm{km}$. Aucun point de la France, métropolitaine ou ultramarine, ne se trouve sur l'équateur. Il n'est donc pas possible d'avoir un satellite géostationnaire à la verticale d'une ville française.

Q11 - Les villes éloignées de l'équateur recevraient trop peu de puissance.

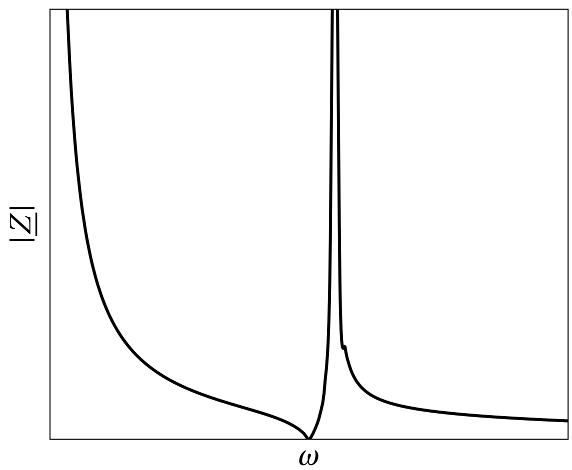
Q12 - $\Delta E = 3{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV} \ll E_2 - E_1 \simeq 10\,\mathrm{eV}$.

Q13 - $\Delta t = \frac{10\mathrm{m}}{c} 0 = 33\,\mathrm{ns}$. Si une horloge atomique est précise au point de donner la fréquence du césium au hertz près, la précision est de l'ordre de $1 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}$, donc suffisante.

Q14 - La dérive serait de l'ordre de 11,4 km par jour !

Q15 - La dérive serait de 33 ms par jour, donc intolérable. Il faut les remettre à l'heure très régulièrement.

Q16 - $C_{eq} = C_S + C_P$, $\omega_S^2 = \frac{1}{LC_S}$, $\omega_P^2 = \frac{C_P + C_S}{LC_P C_S}$.



Q17 - C_S et L ont des valeurs inhabituelles.

Q18 - $\dfrac{\omega_P-\omega_S}{\omega_P} = 3{,}4\times10^{-7}$. Les fréquences sont quasi indiscernables.

Q19 - Avec $\dfrac{\Delta t}{t} = \dfrac{\delta f}{f}$ on obtient une dérive de 0,8 s par mois, ce qui correspond à l'énoncé. La puissance de deux permet de diviser facilement la fréquence par des multiples de 2, lors d'un traitement numérique.

Q20 - Le poids d'un électron est $m_e g \approx 9\times10^{-30}\,\mathrm{N}$, la force électrique est $eE = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{N}$, le rapport de 5×10^{-11} en faveur de la force électrique. La force de Lorentz est $\vec{F}_L = -e\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)$. Comme $B = \dfrac{E}{c}$, le rapport des deux termes de force est $\dfrac{vB}{E} = \dfrac{v}{c} \ll 1$ dans le cas non relativiste.

Q21 - L'équation du mouvement de l'électron est $m_e\dfrac{\mathrm{d}\underline{\vec{v}}_e}{\mathrm{d}t} = -e\underline{\vec{E}}$ qui devient en régime harmonique permanent $i m_e\omega\underline{\vec{v}}_e = -e\underline{\vec{E}}$. Le vecteur densité volumique de courant est $\underline{\vec{j}_e} = -en_e\underline{\vec{v}}_e$ d'où $\underline{\vec{j}_e} = \dfrac{e^2 n_e}{i m_e\omega}\underline{\vec{E}}$. On en déduit l'expression de la conductivité. La conductivité imaginaire pure est liée à l'absence de puissance échangée en moyenne entre l'onde et les électrons.

Q22 - $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ d'où $-\vec{\Delta}\vec{E}+\vec{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{E}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$, puis avec $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ et $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ on déduit :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

On en déduit, en signal harmonique complexe :

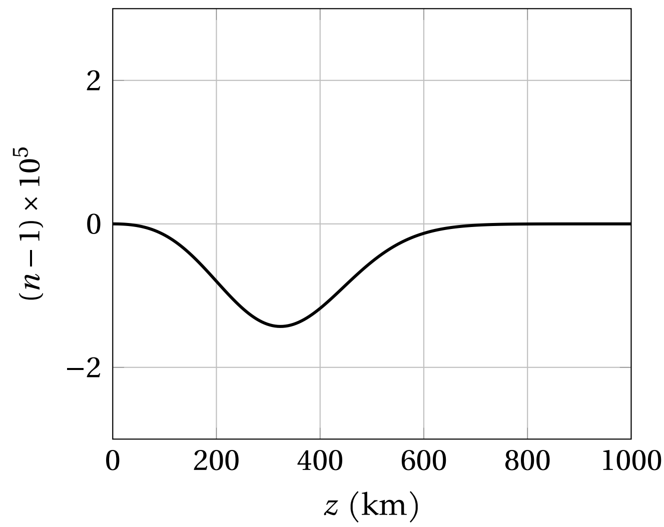
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{e^2 n_e}{c^2\varepsilon_0 m_e}.$$

Q23 - La densité chute pour $z < 350\,\mathrm{km}$ pour deux raisons, la forte densité gazeuse qui recombine les électrons libres et la faible intensité du rayonnement UV du Soleil. Au delà de 350 km, la chute de la densité moléculaire de l'atmosphère entraîne la baisse du taux d'ionisation.

Q24 - $n_{e\mathrm{max}} \approx 10^{12}\,\mathrm{m^{-3}}$. On en déduit $f_p = f_{\mathrm{min}} = 9\,\mathrm{MHz}$.

Q25 - $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{f_p^2}{f^2}}}$. $n = \dfrac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1-\dfrac{f_p^2}{f^2}}$. Cet indice est inférieur à 1.

Q26 - On développe $n \approx 1 - \dfrac{f_p^2}{2f^2}$ d'où le résultat.
La valeur minimale est $n_{\min} = 1 - 1{,}63 \times 10^{-5}$, la valeur maximale est 1.



Q27 - L'affirmation (b) est vraie : quand un rayon (dirigé par le vecteur d'onde $\vec{k}$) descendant du vide (indice 1) rencontre l'ionosphère, l'indice **diminue**, ce qui **éloigne** le rayon de la normale (la verticale). En-dessous de 350 km, l'indice **croit**, ce qui **rapproche** le rayon de la normale.

Q28 - Par définition, et en calculant le retard sur un rayon ascendant : $\tau_{p1} = \displaystyle\int_0^H \frac{\mathrm{d}z}{c} - \int_0^H \frac{\mathrm{d}z}{v_g}$ d'où le résultat. Le développement de la racine et l'expression de la fréquence de coupure conduit au résultat.

Q29 - $C_{ET} \simeq 1{,}5 \times 10^{17}\,\mathrm{m}^{-2}$, $L_{p1} \simeq 220\,\mathrm{m}$. Il est absolument nécessaire de corriger l'influence de l'ionosphère.

Q30 - $C_{ET} = \dfrac{\tau_{\text{ret}}}{a}\dfrac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}$: le retard permet l'évaluation quasi-instantanée du C_{ET} et donc la correction à utiliser. $L_{p1} = 143\,\mathrm{m}$.

Q31 - Un maillage mondial de récepteurs GPS/Galileo mesurent à chaque instant le retard τ_{ret} qui est traduit en C_{ET}. Les mesures sont réunies par un centre (ici la NASA) et rapidement publiées.