SESSION 2021 PC8M

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)$, déterminer la valeur de la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty,-1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k\,\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
   Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

6. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.

7.
   7.1. Calculer $L(e_0)$.

   7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\,L(e_k)$.

   7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

8. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

9. **Recherche des sous-espaces propres de L**
   Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

   9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.

   9.2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0 \ \ (*)$.

   9.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

   9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

   9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
   L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

10. Comparer L^{-1} et $D+ \mathrm{Id}$.

11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.

Exercice 3

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0, b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

   2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

   2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

   (1) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $\dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

   2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

   2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une unique matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V_{n+1} = M\, V_n$.

4. Justifier que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

5. Montrer que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad M^n = a_n\, I_2 + b_n\, M$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k\,!}$.

Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M.

7. Démontrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, ..., P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E. Soit $(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $(P|Q) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit P un polynôme de E, calculer $(P|P_0)$.

3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(\ |\ )$.

3.3. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.

3.4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.

3.5. Déterminer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

4.1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

4.2. Déterminer $H^{\perp}$ et en déduire la dimension de H.

5. Soit Q un polynôme de E.

5.1. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^{\perp}$.

5.2. Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1165 – D'après documents fournis