ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall\, x \in J,\quad f_{-1}(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions

1.1. Soient $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

1.2. Démontrer alors que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$.

1.3. En déduire la dimension de E.

2. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall\, x \in J,\quad g(x) = (1+x)\, f'(x).$$

2.1. Déterminer, pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.

2.2. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2.3. Déterminer le noyau et l'image de u.

2.4. Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

2.5. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

2.6. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2.7. L'endomorphisme u^2 est-il diagonalisable ?

3. Résoudre sur J l'équation différentielle $(ED)\ \ f_{-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.

4. Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en zéro.

4.1. On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)\, y'(t)$ nulle en zéro.
Expliciter h_3.

4.2. En itérant le procédé, on note pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, h_k la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.
Expliciter h_k.

5. Étude de la série de fonction $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} h_k$

5.1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} h_k$ converge simplement sur J et calculer sa somme H.

5.2. La fonction H est-elle dans E ?

5.3. En utilisant la question **5.1**, vérifier que H est dérivable et que $H' \in E$.

Exercice 2

On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S vérifiant : $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de y_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

$$(1)\ \ y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}\,; \qquad (2)\ \ y_n = \frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}\,; \qquad (3)\ \ y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}.$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par :
• X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
• pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

3.1. Montrer que la variable aléatoire X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

3.2. Démontrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = y_{n-1}\,X_0 + y_n\,X_1$.

3.4. Étude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in \mathbb{N}$

3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la covariance $\mathrm{Cov}(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp\left(-t^n\right)\mathrm{d}t$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

2. En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

4. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J que l'on ne cherchera pas à calculer.

5. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.

6. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

6.1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

6.2. On pose pour tout x réel et lorsque cela est possible $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

Donner l'ensemble de définition de f.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.

On rappelle que dans ce cas, $E = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} E_j$ où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.

Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j \ \ (*).$$

2. Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.

On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

2.1. Vérifier que l'on a : $\forall\, P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum\limits_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$.

2.2. Montrer que u est diagonalisable.

On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

2.3. Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m} \dfrac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}$.

2.3.1. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1,m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

2.3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

2.3.3. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}$.

2.4. Prouver que l'on a : $\forall\, j \in [\![1,m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

2.5. Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1172 – D'après documents fournis