

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right)$, déterminer la valeur

de la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et intégrable sur $] -\infty, -1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de \mathbb{R} associe $\int_a^x f(t) dt$.

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur \mathbb{R} et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de \mathbb{R} associe $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

* * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ la base canonique de E_n .

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n .

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k e^t$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.
6. En déduire $\text{Ker}(L)$.
7.
 - 7.1. Calculer $L(e_0)$.
 - 7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.
 - 7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n .
8. Prouver que L est un automorphisme de E_n .
9. **Recherche des sous-espaces propres de L**
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.
 - 9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.
 - 9.2. Montrer que f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ (*).
 - 9.3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (*).
 - 9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle (*).
 - 9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
L'endomorphisme L est-il diagonalisable?
10. Comparer L^{-1} et $D + \text{Id}$.
11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base \mathcal{B} .
12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1} . Retrouver alors les valeurs propres de L .

Exercice 3

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\frac{1}{\gamma}$.
2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0, b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.
 - 2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.
 - 2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n . Laquelle ?

(1) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$;

(2) $\frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$;

(3) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.
 - 2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n .
 - 2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une unique matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V_{n+1} = M V_n$.
4. Justifier que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
5. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n I_2 + b_n M$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$.
Montrer que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M .
7. Démontrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E .
Soit $(a_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose : $(P|Q) = \sum_{j=0}^n P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Soit P un polynôme de E , calculer $(P|P_0)$.

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3.2. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(|)$.

3.3. En déduire que \mathcal{B} est une base de E et qu'elle est orthonormale.

3.4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base \mathcal{B} .

3.5. Déterminer $\sum_{j=0}^n L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^n P(a_j) = 0$.

4.1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E .

4.2. Déterminer H^\perp et en déduire la dimension de H .

5. Soit Q un polynôme de E .

5.1. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur H^\perp .

5.2. Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H .

CORRECTION

Exercice 1.

1. On reconnaît une série alternée.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

Alors, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge

2.

2.1. Nous allons appliquer, comme l'indique l'énoncé, le Théorème d'intégration terme à terme.

On remarque tout d'abord que pour tout $n \geq 0$, $\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Alors, d'après le cours, comme :

- pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum_{n \geq 0} x^{2n}(1-x) = (1-x) \sum_{n \geq 0} x^{2n}$ qui est une série géométrique de raison $x^2 \in [0, 1[$ et ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} x^{2n}(1-x)$ de fonctions continues sur $[0, 1[$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction $x \mapsto (1-x) \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$;

- la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge car $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}$.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

2.2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx \right) &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2N+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2N+2} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

On fait alors tendre N vers l'infini, ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \text{ d'après la question précédente.}$$

Il reste à calculer cette intégrale : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$ pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

3. Il s'agit dans cette question de déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série proposée converge.

Cela revient à trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Par exemple :

- Si $|x| > 1$, alors la suite $\left((-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge. Ainsi, la fonction φ n'est pas définie pour $|x| > 1$.

- Si $|x| < 1$, alors pour tout $n \geq 1$, $\frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$ et la série $\sum_{n \geq 1} |x|^n$ est une série géométrique convergente. Ainsi, dans ce cas, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente et φ est au moins définie sur $] -1, 1[$.

- Si $x = 1$, d'après la question **1.**, $\varphi(1)$ est bien définie et $\varphi(1) = \ln(2)$

- Si $x = -1$, le terme générique de la série proposée s'écrit $(-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n}$ qui est le terme générique d'une série qui diverge.

Conclusion : φ est définie sur $] -1, 1]$

4.

4.1. Le dénominateur de la fraction rationnelle à intégrer étant $1+x^2$, dans le cours, on sait intégrer soit $\frac{1}{1+x^2}$, soit $\frac{2x}{1+x^2}$. Il faut donc faire apparaître ces deux fractions rationnelles :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= [\arctan(x)]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

4.2. - Une première façon de calculer la somme proposée est de faire comme dans la question **2.1.** en appliquant le théorème d'intégration terme à terme :

• $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}$, et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ est absolument convergente.

• On remarque ensuite que pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} (1-x) = (1-x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$,

et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right) &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} (1-x) \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

- Mais on peut aussi commencer par calculer l'intégrale dans la somme :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \int_0^1 x^{2n} (1-x) dx = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

En conclusion, on a donc :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Exercice 2.

Question de cours

Soit a un nombre réel. On note $I =]-\infty, a[$ et f une fonction continue et intégrable sur I .

1. Comme la fonction f est continue sur I et d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F_1 est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, $F_1'(x) = f(x)$.

\Leftrightarrow Pour bien voir ce dernier résultat : si H est une primitive de la fonction f sur I (qui existe puisque f est continue sur I), alors $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt = H(x) - H(a)$.

Comme $H(a)$ est une constante, il vient naturellement : $\forall x \in I, F_1'(x) = H'(x) = f(x)$

2. Comme f est continue et intégrable sur I , la fonction F est bien définie sur I .

L'idée est de se ramener à la question précédente.

On va couper cette intégrale en deux morceaux en introduisant un $b \in I$.

Alors, pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_{-\infty}^b f(t) dt + \int_b^x f(x) dt$.

Or, $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ est une constante et donc, d'après la question précédente, la fonction F est de

classe C^1 sur I et pour tout $x \in I, F'(x) = f(x)$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ la base canonique de E_n .

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n .

3. Soient $k \in \mathbb{N}$.

La fonction f_k est continue sur $] -\infty, -1]$.

On a facilement $|f_k(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$.

On en déduit (Théorème de comparaison) que : $\forall k \in \mathbb{N}, f_k$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$

\Leftrightarrow Noter que cela entraîne que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont intégrables sur tout intervalle $] -\infty, c]$ où c est un réel quelconque : il suffit d'écrire que $\int_{-\infty}^c f_k(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f_k(t) dt + \int_{-1}^c f_k(t) dt$.

4. • On commence par vérifier que l'application L est bien définie :

Pour toute fonction f de E_n , $t \mapsto f(t)e^t$ est une combinaison linéaire des f_0, f_1, \dots, f_n .

En utilisant alors la question précédente, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)e^t$ est intégrable sur $] -\infty, x]$ pour tout réel x , ce qui prouve que **l'application L est bien définie**.

• Prouvons la linéarité de L :

Soient f et g deux éléments de E_n et λ un réel. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L(\lambda f + g)(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^x (\lambda f + g)(t)e^t dt \\ &= \lambda e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt + e^{-x} \int_{-\infty}^x g(t)e^t dt \\ &= \lambda L(f)(x) + L(g)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, **L est une application linéaire**.

\Leftrightarrow On aurait aussi pu dire que la linéarité de L découlait directement de la linéarité de l'intégrale.

Conclusion : L est une application linéaire sur E_n

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto f(t)e^t$ étant continue et intégrable sur $] -\infty, x]$, en utilisant la question de cours, on obtient que la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et par suite, que g est de

classe C^1 sur \mathbb{R} .

De plus, toujours d'après la question de cours, pour tout réel x , $g'(x) = -g(x) + e^{-x}f(x)e^x = -g(x) + f(x)$.

Cela revient à dire que : g est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$

6. Une fonction f est dans $\text{Ker}(L)$ si et seulement si $g = L(f) = 0$.

Or d'après la question précédente, $g = L(f) \iff g' + g = f$.

Ainsi, $f \in \text{Ker}(L) \iff f = 0_{E_n}$ où 0_{E_n} est la fonction nulle de E_n puisque g est nulle.

Conclusion : $\text{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}$

7.

7.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L(e_0)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t dt = e^{-x} e^x = 1$. Ainsi, $L(e_0) = e_0$

7.2. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On va faire une intégration par parties, qui est licite car :

- les fonctions $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} ,
- la limite $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^{k+1} e^t$ existe et vaut 0 par croissances comparées,
- les fonctions sont intégrables sur $] -\infty, c]$ pour tout c réel.

Ainsi, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(e_{k+1})(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^x t^{k+1} e^t dt \\ &= e^{-x} \left([t^{k+1} e^t]_{-\infty}^x - \int_{-\infty}^x (k+1)t^k e^t dt \right) \\ &= e^{-x} \left(x^{k+1} e^x - (k+1) \int_{-\infty}^x t^k e^t dt \right) \\ &= e_{k+1}(x) - (k+1)L(e_k)(x). \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$

7.3. Pour montrer que L est un endomorphisme de E_n , il reste à montrer que $\forall f \in E_n, L(f) \in E_n$.

Or, comme on sait que L est linéaire et que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n , il suffit de montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(f_k) \in E_n$.

Pour ce faire, nous allons raisonner par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Initialisation : d'après la question 7.7.1., $L(e_0) = e_0 \in E_n$, donc la propriété est vraie pour $k = 0$.

- Hypothèse de récurrence : Supposons que pour un $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L(e_k) \in E_n$.

Montrons maintenant que $L(e_{k+1}) \in E_n$.

D'après la question précédente, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.

Alors, en utilisant hypothèse de récurrence et le fait que E_n est un espace vectoriel, on obtient que $L(e_{k+1})$ est un élément de E_n .

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L(e_k) \in E_n$

Ainsi, d'après la remarque faite au début de la question, L est un endomorphisme de E_n

8. D'après la question **6.**, L est injective.

On vient de démontrer que L est un endomorphisme de E_n qui est de dimension finie, et donc,

L est un automorphisme de E_n

9. Recherche des sous-espaces propres de L .

Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. D'après la question **6.**, L est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de L .

9.2. Puisque f est un vecteur propre associé à la valeur propre λ , la fonction f vérifie $L(f) = \lambda f$.

En utilisant la question **5.**, λf est solution de l'équation différentielle $y' + y = f$.

Autrement dit, f vérifie $\lambda f' + \lambda f = f$, ce qui revient à $\lambda f' + (\lambda - 1)f = 0$.

Conclusion : f est solution de l'équation différentielle (*)

9.3. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle se réécrit $y' + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)y = 0$

Donc :

• Si $\lambda = 1$, alors l'équation différentielle se réécrit : $y' = 0$, dont les solutions sont les fonctions constantes.

• Si $\lambda \neq 1$, alors les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ke^{(-1+\frac{1}{\lambda})x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

9.4. • Si $\lambda = 1$, alors les solutions sont constantes et sont donc polynomiales.

• Si $\lambda \neq 1$, les fonctions $x \mapsto Ke^{(-1+\frac{1}{\lambda})x}$ ne sont polynomiales que si $K = 0$ car $-1 + \frac{1}{\lambda}$ ne s'annule pas.

Ainsi, les seules solutions polynomiales de l'équation (*) sont les fonctions constantes

9.5. Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

Alors f est polynomiale (dans E_n) et est solution de (*).

Ainsi, d'après la question précédente, la seule possibilité est $\lambda = 1$ et $f \in \text{Vect}(e_0)$.

Conclusion : L'endomorphisme L n'a qu'une seule valeur propre, et le sous espace propre associé est de dimension 1.

Comme E_n est de dimension $n+1 > 1$ (car $n \geq 2$), on en déduit que L n'est pas diagonalisable

10. Soit $f \in E_n$ et $g = L(f)$.

On a vu à la question 5. que : $g = L(f) \iff g' + g = f \iff (D + \text{Id})(g) = f$

Mais aussi, $g = L(f) \iff f = L^{-1}(g)$ puisque l'on sait que L est un automorphisme de ED_n .

On en déduit alors que $L^{-1} = D + \text{Id}$.

11. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L^{-1}(e_k) = (D + \text{Id})(e_k) = ke_{k-1} + e_k$, et $L^{-1}(e_0) = e_0$.

Donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. La matrice M est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Donc $\text{Sp}(L^{-1}) = \{1\}$

Ensuite :

λ est valeur propre de L si et seulement s'il existe $f \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$ telle que $L(f) = \lambda f$, soit encore $\frac{1}{\lambda}f = L^{-1}(f)$.

Autrement dit λ est valeur propre de L ssi $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de L .

Conclusion : $\text{Sp}(L) = \{1\}$

Exercice 3.

1. D'après les relations coefficients racines, les racines, on a, en notant r_1 et r_2 les racines de l'équation :

$$\begin{cases} r_1 r_2 = -1 & (1) \\ \text{et} \\ r_1 + r_2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Comme le discriminant $\Delta = 5 > 0$, les deux racines sont réelles et de signe contraire d'après (1).

En utilisant les notations de l'énoncé, les deux racines s'écrivent donc, d'après (1) : γ et $-\frac{1}{\gamma}$.

De plus, $\gamma = 1 - \frac{-1}{\gamma} = 1 + \frac{1}{\gamma} > 1$

2. Soit (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

2.1. Soit n un entier strictement positif. Alors $a_n = b_{n-1}$, donc $b_{n+1} = a_n + b_n = b_{n-1} + b_n$.

2.2. • Pour la première, en prenant $n = 0$, on trouve $b_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \neq 0$, donc cette expression ne convient pas.

• Comme les racines de l'équation caractéristique associée à la suite (b_n) sont γ et $-\frac{1}{\gamma}$, l'expression doit être une combinaison linéaire de γ^n et $\frac{(-1)^n}{\gamma^n}$. La seconde expression est une combinaison linéaire de $(-\gamma)^n$ et $\frac{1}{\gamma^n}$, ce qui ne convient pas.

Ainsi, la troisième expression est l'expression correcte

2.3. Par définition des suites (a_n) et (b_n) , pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = b_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n \sqrt{5}}$.

De plus, $a_0 = b_1 - b_0 = 1$, et

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^{-1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^{-1} \sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1} \sqrt{5}}$

2.4. On peut soit procéder par récurrence, ou bien utiliser les expressions trouvées précédemment :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n + b_n \gamma &= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1} \sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n-1} \sqrt{5}} \\ &= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \\ &= \gamma^n \end{aligned}$$

en répétant le calcul de la question précédente.

3. En posant $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie alors directement que $V_{n+1} = M V_n$.

4. Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Or, ce polynôme a deux racines γ et $-\frac{1}{\gamma}$ qui sont distinctes (une est strictement positive, l'autre strictement négative). Il est donc scindé à racines simples. La matrice M est diagonalisable.

On aurait aussi pu dire que comme M est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Les valeurs propres de M sont γ et $-\frac{1}{\gamma}$.

De plus,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = \gamma x \\ x + y = \gamma y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \gamma x \\ 0 = \gamma^2 x - \gamma x - x \end{cases} \iff y = \gamma x.$$

Donc $E_\gamma = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} \right)$.

De même on trouve $E_{-\frac{1}{\gamma}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

5. Pour prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation $M^n = a_n I_2 + b_n M$, on effectue un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel n .

- Initialisation : comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on a bien $M^0 = a_0 I_2 + b_0 M$.

- Hypothèse de récurrence : supposons que pour $n \geq 0$, on a : $M^n = a_n I_2 + b_n M$.

Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \cdot M^n \\ &= M (a_n I_2 + b_n M) \\ &= a_n M + b_n M^2 \\ &= a_n M + b_n (I_2 + M) \\ &= b_n I_2 + (a_n + b_n) M \\ &= a_{n+1} I_2 + b_{n+1} M \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = a_n I_2 + b_n M$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On commence par donner une autre expression de C_n en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k I_2 + b_k M}{k!} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} \right) M \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\gamma^{k-1}}{k!} - \frac{(-\gamma^{-1})^{k-1}}{k!} \right) I_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\gamma^k}{k!} - \frac{(-\gamma^{-1})^k}{k!} \right) M \end{aligned}$$

Or, la série de terme général $\frac{\gamma^k}{k!}$ converge vers e^γ et la série de terme général $\frac{(-\gamma^{-1})^k}{k!}$ converge vers $e^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Il en résulte que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$C = \left(\frac{e^\gamma}{\gamma \sqrt{5}} + \frac{\gamma e^{-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{5}} \right) I_2 + \frac{e^\gamma - e^{-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{5}} M$$

7. Comme M est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $M = P D P^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Or, on montre par une récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P D^n P^{-1}$.

Cela nous permet d'écrire que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{k=0}^n \frac{\gamma^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^n \frac{(-\gamma^{-1})^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini et en utilisant la continuité de la fonction $M \mapsto P M P^{-1}$, on trouve

$$C = P \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\gamma}} \end{pmatrix} P^{-1} = P \Delta P^{-1}$$

et C est bien semblable à la matrice Δ .

Exercice 4.

1. D'après le cours, pour démontrer que $(|)$ est un produit scalaire, il faut prouver qu'il s'agit d'une application bilinéaire symétrique, positive et définie.

- Symétrie : soient $(P, Q) \in E^2$.

On a $(P|Q) = \sum_{j=0}^n P(a_j)Q(a_j) = \sum_{j=0}^n Q(a_j)P(a_j) = (Q|P)$ et $(|)$ est symétrique.

- Bilinearité : soient $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q|R) &= \sum_{j=0}^n (\lambda P + Q)(a_j)R(a_j) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^n P(a_j)R(a_j) + \sum_{j=0}^n Q(a_j)R(a_j) \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R) \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à gauche.

Par symétrie, on a la bilinéarité.

- Positivité : soit $P \in E$, $(P|P) = \sum_{j=0}^n P(a_j)^2 \geq 0$.

- Définition : soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$.

Alors $\sum_{j=0}^n P(a_j)^2 = 0$ donc pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_j) = 0$.

Il en résulte que P admet $n + 1$ racines distinctes.

Comme P est de degré au maximum n , il ne peut avoir au maximum que n racines et donc, c 'est le polynôme nul.

Conclusion : (|) est un produit scalaire sur E

2. Soit $P \in E$.

$$(P|P_0) = \sum_{j=0}^n P(a_j)P_0(a_j) = \sum_{j=0}^n P(a_j)$$

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Alors $L_j(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0$ car $i \neq j$.

En fait, pour tout $i \neq j$, $X - a_i$ est en facteur dans L_j .

Ensuite, pour $i = j$, $L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$.

3.2. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. D'après la question précédente,

$$(L_i|L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k)L_j(a_k) = L_i(a_i)L_j(a_i) + L_i(a_j)L_j(a_j) = 0.$$

Donc la famille \mathcal{B} est une famille orthogonale.

3.3. Comme \mathcal{B} est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, elle est libre. Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = n + 1 = \dim(E)$, c'est une base de E .

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(L_i|L_i) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k)^2 = L_i(a_i)^2 = 1.$$

et, \mathcal{B} est une base orthonormale de E

3.4. Soit $P \in E$.

Comme \mathcal{B} est une base orthonormale de E , les composantes de P sont données par :

$$(P|L_i) = \sum_{k=0}^n P(a_k)L_i(a_k) = P(a_i)$$

Ainsi, $P = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$

3.5. On remarque que $P_0 = \sum_{j=0}^n L_j$ car pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_0(a_i) = 1$.

4.

4.1. L'application $\varphi : P \in E \mapsto (P_0|P) = \sum_{j=0}^n P(a_j)$ est linéaire car le produit scalaire est bilinéaire.

Donc $H = \text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E

4.2. D'après le cours, on a $H = \text{Vect}(P_0)^\perp$, donc $H^\perp = \text{Vect}(P_0)$

Comme $\dim(H^\perp) = 1$, on a $\dim(H) = \dim(E) - 1 = n$

5.

5.1. D'après le cours, on sait bien projeter orthogonalement sur un sous-espace lorsque l'on a une base orthonormale de ce sous-espace.

Comme $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$, le vecteur $R = \frac{P_0}{\|P_0\|} = \frac{P_0}{\sqrt{n+1}}$ est une base orthonormée de H^\perp .

Ainsi, le projeté orthogonal de Q sur H^\perp est donné par

$$(Q|R)R = \frac{1}{n+1}(Q|P_0)P_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)P_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)$$

soit

$$p_{H^\perp}(Q) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)$$

5.2. Enfin, la distance de Q au sous-espace vectoriel H est égale à la norme du projeté orthogonal de Q sur H^\perp :

$$d(Q, H) = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)P_0 \right\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{j=0}^n Q(a_j) \right|$$

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

- Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examineur), **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.**

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que "il est trivial que", "par une récurrence immédiate", etc... rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.

Nous avons été déçus par le trop grand nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, d'analyse et qui espèrent venir à bout du sujet grâce à des recettes toutes faites.

Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont très rapidement abandonnés.

- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments bidons ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

- Dans certaines copies on trouve beaucoup trop d'abréviations CVU, CVS, CSTP (comparaison de séries à termes positifs) voire des symboles mathématiques en guise d'abréviation...

- La rédaction est souvent inadmissible : les flèches (voir rien du tout) remplacent les phrases, les résultats ne sont pas encadrés, les théorèmes ont des noms aléatoires (lorsqu'ils en ont).

- Certains candidats recopient simplement le résultat demandé en guise de réponse en espérant que cela passe.

- Les convergences d'intégrales et de séries ne sont justifiées que si cela est explicitement demandé.

• Commentaires exercice par exercice

Exercice 1

1. Question en général traitée : attention à ne pas oublier les hypothèses précises d'application du critère spécial des séries alternées.

2. Cela ne doit pas être à l'examineur de faire le choix des hypothèses énoncées en vrac pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Beaucoup de candidats tentent de prouver la convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$ alors que la non continuité de la fonction somme aurait dû les en dissuader.

Enfin, calculer la somme d'une série géométrique relève trop souvent de l'exploit...

3. Trop peu d'étudiants reconnaissent une série entière et répondent à la question.

On a trop souvent trouvé $D =]-1, 1[$, sans que le candidat soit gêné lorsqu'on lui demande de calculer $\varphi(1)$!

4. Rappelons que l'intégration par parties n'est pas la panacée du calcul intégral.

On retrouve ensuite les mêmes problèmes que pour la question 2.

Exercice 2

1. et 2. Questions faciles si l'on utilise la notion de primitive, notion qui semble mal comprise voire méconnue.

Trop de candidats pensent qu'il s'agit d'une intégrale à paramètre...

3. Soit la continuité de la fonction à intégrer est oubliée, soit c'est elle qui justifie l'intégrabilité sur $] -\infty, -1]$.

Ne pas oublier que toute domination se fait sur des fonctions positives.

4. Question en général bien traitée.

5. et 6. Questions souvent mal comprise : trop de candidats tentent de résoudre l'équation différentielle $y' + y = f(x)$ et veulent se servir des résultats obtenus pour traiter la question 6..

7.1. Question traitée correctement.

7.2. Ne pas oublier qu'il faut justifier l'utilisation d'une intégration par parties.

7.3. On a souvent rencontré une mauvaise justification de l'utilisation de la base canonique pour conclure.

8. Le fait que E_n est de dimension finie n'est que trop peu souvent évoqué.

9. Question en général peu abordée. Le fait de rechercher des solutions polynomiales d'une équation différentielle semble avoir désarçonné beaucoup d'étudiants.

Exercice 3

1. Trop rares sont les candidats qui ont utilisé les relations coefficients racines. Beaucoup de lourdeur dans la résolution de cette question.

2.1. Question en général bien traitée.

2.2. L'objectif de cette question était de donner l'expression juste de y_n sans que le candidat soit obligé d'effectuer tous les calculs. Était-ce efficace ?

3., 4. et 5. Questions en général bien traitées. La seule difficulté rencontrée s'est située au niveau du calcul des vecteurs propres de la matrice M .

6. et 7. Même si certains candidats reconnaissent l'exponentielle de matrice, on demandait ici pour répondre correctement à la question de montrer la convergence et de calculer explicitement la limite obtenue en utilisant les questions précédentes.

Exercice 4

1. Question en général bien traitée sauf quelques imprécisions pour démontrer le caractère défini du produit scalaire.

2. Pas de problème sur cette question.

3. Questions classiques en général bien traitées.

Cela se gâte à partir de la question 3.4. et surtout 3.5.

4.1. Trop d'étudiants ont du mal à montrer que H est un sous-espace vectoriel de E !

4.2. L'orthogonal de H est rarement explicité clairement.

5.1. Les propriétés de la projection orthogonale sont en général bien citées mais on a remarqué de grosses difficultés pour les mettre en oeuvre ici.

5.2. Les relations entre projection orthogonale sur H et projection orthogonale sur H^\perp ne sont pas toujours bien maîtrisées.

FIN