Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall\, x \in J,\ \ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions

1.1. Soient $(a_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

1.2. Démontrer alors que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.

1.3. En déduire la dimension de E.

2. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall\, x \in J,\ \ g(x) = (1+x)\, f'(x).$$

2.1. Déterminer, pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.

2.2. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2.3. Déterminer le noyau et l'image de u.

2.4. Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

2.5. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

2.6. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2.7. L'endomorphisme u^2 est-il diagonalisable ?

3. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) $\ f_{-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.

4. Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en zéro.

4.1. On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)\, y'(t)$ nulle en zéro.
Expliciter h_3.

4.2. En itérant le procédé, on note pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, h_k la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.
Expliciter h_k.

5. Étude de la série de fonction $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} h_k$

5.1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} h_k$ converge simplement sur J et calculer sa somme H.

5.2. La fonction H est-elle dans E ?

5.3. En utilisant la question **5.1**, vérifier que H est dérivable et que $H' \in E$.

Exercice 2

On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S vérifiant : $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de y_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

$$(1)\;\; y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}\,; \qquad (2)\;\; y_n = \frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}\,; \qquad (3)\;\; y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}.$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par :
• X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
• pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

3.1. Montrer que la variable aléatoire X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

3.2. Démontrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = y_{n-1} X_0 + y_n X_1$.

3.4. Étude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in \mathbb{N}$

3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la covariance $\mathrm{Cov}(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

2. En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

4. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J que l'on ne cherchera pas à calculer.
5. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.
6. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$.
   6.1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
   6.2. On pose pour tout x réel et lorsque cela est possible $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$.
   Donner l'ensemble de définition de f.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.
On rappelle que dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$ où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j \ \ (*).$$
2. **Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable**.
On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.
   2.1. Vérifier que l'on a : $\forall\, P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$.
   2.2. Montrer que u est diagonalisable.
   On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.
   2.3. Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{k=1,k\neq j}^{m} \dfrac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}$.
      2.3.1. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.
      2.3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.
      2.3.3. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}$.
   2.4. Prouver que l'on a : $\forall\, j \in [\![1, m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.
   2.5. Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

FIN

CORRECTION

Exercice 1.

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall\, x \in J,\quad f_{-1}(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}$$

1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions.

1.1. Soient $(a_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.

Ainsi, $\forall\, x \in J$, $a_{-1}\ \ln(1+x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k} = 0$

En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(a_{-1}\ \ln(1+x) + \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k}\right) = 0$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k}\right) = a_0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$ entraînent que $\boxed{a_0 = a_{-1} = 0}$

1.2. Il reste à prouver que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $a_k = 0$.

Or : $\forall\, x \in J$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k} = 0 \iff \forall\, x \in J,\ \sum_{k=1}^{p} a_k\,(1+x)^{p-k} = 0$

La famille $\left((1+x)^{p-k}\right)_{k\in[\![1,p]\!]}$ étant une famille de polynôme de degrés échelonnés, elle est libre et nous pouvons en déduire que : $\forall\, k \in [\![1, k]\!]$, $a_k = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]} \text{ est libre}}$

1.3. Comme $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$, la famille $\mathscr{B}$ engendre E : $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = p+2}$

2. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall\, x \in J,\quad g(x) = (1+x)\, f'(x)$$

2.1. Facilement, en utilisant la définition de u, on trouve :

- $u(f_{-1}) = f_0$,
- $\forall\, k \in [\![0, p]\!]$, $u(f_k) = -k\, f_k$.

En particulier, $u(f_0) = 0$ (application nulle).

2.2. • u est linéaire puisque la dérivation est linéaire.

• D'après les questions précédentes :

- $\mathscr{B}$ est une base de E,
- $\forall\, k \in [\![0, p]\!]$, $u(f_k) \in E$

et par conséquent, la linéarité de u entraîne que : $\forall\, f \in E$, $u(f) \in E$.

Conclusion : u est un endomorphisme de E.

2.3. D'après le cours et comme $\mathscr{B}$ est une base de E, on a, en utilisant la question précédente :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, ..., f_p).$$

D'après le Théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.

Comme $u(f_0) = 0$ et que $f_0 \neq 0$, on en déduit : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(f_0)$.

2.4. Comme $f_{-1} \notin \mathrm{Im}(u)$, on a $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \varnothing$.

2.5. La matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$ est donnée grâce à la question **2.1.**.

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix}$

2.6. La matrice M est triangulaire inférieure.

Ses valeurs propres de la matrice M sont donc les éléments de la diagonale, soit $\{0, -1, -2, ..., -p\}$. Les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont tous de dimension 1, ce qui entraîne que E n'est pas la somme directe de ses sous-espaces propres.

On en déduit que M et par suite u, n'est pas diagonalisable.

2.7. Facilement, par un calcul par blocs, $M^2 = \mathbf{diag}(0, 0, 1, 4, ..., p^2)$ et donc, u^2 est diagonalisable.

3. L'équation différentielle s'écrit encore $y'(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ puisque $t \in J$.

Ainsi, les fonctions solutions de cette équation différentielle sur J sont de la forme :

$$t \longmapsto \frac{1}{2}\ln^2(1+t) + C \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

4. On a $h_2 : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(1+t)$

4.1. On a donc : h_3 est la solution sur J qui s'annule en 0 de l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{1}{2}\ \ln^2(1+t) \times \frac{1}{1+t}$$

Il en résulte que h_3 est la fonction :

$$h_3 : t \mapsto \frac{1}{6}\ \ln^3(1+t)$$

4.2. On va raisonner par récurrence sur l'entier k en notant : $P(k)$ la proposition :

$$h_k : t \in J \longmapsto \frac{1}{k\,!}\ \ln^k(1+t)$$

• $P(2)$ est vérifiée d'après la question précédente.

• Soit alors $k \geqslant 2$ tel que la proposition $P(k)$ soit vérifiée.

Alors, h_{k+1} est la solution qui s'annule en 0 de l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{k\,!}\ \ln^k(1+t)$$

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{(k+1)\,!}\ \ln^{k+1}(1+t)$ vérifie : $g(0) = 0$ et $\forall\, t \in J,\ g'(t) = h_k(t)$

Il s'en suit que $g = h_{k+1}$, ce qui prouve $P(k+1)$.

• Conclusion : $\forall\, k \geqslant 2,\ h_k : t \mapsto \dfrac{1}{k\,!}\ \ln^k(1+t)$.

5. Etude de la série de Fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 2} h_k$.

5.1. La série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 2} h_k$ s'écrit pour tout $t \in J$:

$$\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k\,!}\ \ln^k(1+t)$$

On reconnaît la série entière de la fonction exponentielle qui est de rayon de convergence infini.

Il en résulte que la série converge et que l'on a :

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k\,!}\ \ln^k(1+t) = \exp(\ln(1+t)) - \ln(1+t) - 1$$

et donc, $H : t \mapsto t - \ln(1+t)$.

5.2. On a : $H = \mathrm{Id}_E - f_0$.

La fonction H sera dans E si et seulement si Id_E l'est.

Supposons donc qu'il existe une famille de scalaires $(b_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ telle que : $\mathrm{Id}_E = \sum\limits_{k=-1}^{p} b_k\, f_k$.

Ainsi, $\forall\, x \in J,\ x = b_{-1}\ \ln(1+x) + \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{b_k}{(1+x)^k}$ et pour $x \neq 0,\ 1 = b_{-1}\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} + \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{b_k}{x(1+x)^k}$

En faisant alors tendre x vers $+\infty$, on obtient $1 = 0$, ce qui prouve que notre hypothèse est fausse.

Ainsi, $\mathrm{Id}_E \notin E$ et par suite, $H \notin E$.

5.3. H est dérivable d'après la question précédente et on a, pour tout $t \in J$:

$H'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = f_0 - f_1$ et donc, $H' \in E$.

Exercice 2.

On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. D'après les relations coefficients racines, les racines, on a, en notant r_1 et r_2 les racines de l'équation :

$$\begin{cases} r_1\, r_2 = -1 \ (1) \\ \text{ et} \\ r_1 + r_2 = 1 \ (2) \end{cases}$$

Comme le discriminant $\Delta = 5 > 0$, les deux racines sont réelles et de signe contraire d'après (1).

En utilisant les notations de l'énoncé, les deux racines s'écrivent donc, d'après (1) : γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$.

De plus, $\gamma = 1 - \dfrac{-1}{\gamma} = 1 + \dfrac{1}{\gamma} > 1$

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S vérifiant : $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.

En prenant successivement $n = 0$ et $n = 1$ et en utilisant le cours, seule la réponse (3) est correcte.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par :

• X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

• Pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$

3.1. Comme $X_0(\Omega) = X_1(\Omega) = \mathbb{N}$, on a aussi $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit donc $k \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{P}(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([X_0 = i] \cap [X_1 = k-i]) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_0 = i)\,\mathbb{P}(X_1 = k-i)$ puisque les v.a. X_0 et X_1 sont indépendantes

Soit $\mathbb{P}(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i\,!\,\mathrm{e}^{\lambda}}\,\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)\,!\,\mathrm{e}^{\mu}} = \frac{1}{k\,!\,\mathrm{e}^{\lambda+\mu}}\,\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\,\mu^{k-i} = \frac{1}{k\,!\,\mathrm{e}^{\lambda+\mu}}\,(\lambda+\mu)^k$

ce qui prouve que X_2 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

3.2. Comme X_0 est positive, $\mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) = 0$ et les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. On va montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1$ en raisonnant par récurrence sur l'entier naturel n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H(n)$ la proposition : $X_n = y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1$.

• Initialisation :

$y_0\, X_0 + y_1\, X_1 = 0\, X_0 + 1\, X_1 = X_1$ et $y_1\, X_0 + y_2\, X_1 = X_0 + X_1 = X_2$

et donc, $H(0)$ et $H(1)$ sont vérifiées.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vérifiées.

Alors : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n = (y_n\, X_0 + y_{n+1}\, X_1) + (y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1)$ d'après l'hypothèse de récurrence

soit : $X_{n+2} = (y_n + y_{n-1})\, X_0 + (y_{n+1} + y_n)\, X_1 = y_{n+1}\, X_0 + y_{n+2}\, X_1$, ce qui prouve que $H(n+1)$ est vérifiée ;

• Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1$.

3.4. Étude de l'espérance de la variable aléatoire X_n.

3.4.1. D'après la question précédente et par linéarité de l'espérance, on peut écrire :

$\mathbb{E}(X_n) = y_{n-1}\, \mathbb{E}(X_0) + y_n\, \mathbb{E}(X_1) = \lambda\, y_{n-1} + \mu\, y_n$

ce qui prouve par la même occasion que l'espérance de X_n existe.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \lambda\, y_{n-1} + \mu\, y_n$.

3.4.2. Comme $\gamma > 1$, on a $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}}$

Ainsi : $x_n = \lambda \left(\dfrac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + o\left(\gamma^{n-1}\right) \right) + \mu \left(\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + o\left(\gamma^n\right) \right)$

c'est-à-dire : $x_n = \dfrac{\lambda + \mu\,\gamma}{\sqrt{5}}\, \gamma^{n-1} + o\left(\gamma^{n-1}\right)$ et donc, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda + \mu\,\gamma}{\sqrt{5}}\, \gamma^{n-1}$

3.5. Comme X_0 et X_1 sont indépendantes, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n-1}\, X_0$ et $y_n\, X_1$ aussi, et donc :

$\mathbb{V}(X_n) = y_{n-1}^2\, \mathbb{V}(X_0) + y_n^2\, \mathbb{V}(X_1) = y_{n-1}^2\, \lambda + y_n^2\, \mu$,

3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_p, X_q) &= \mathrm{Cov}(y_{p-1}\, X_0 + y_p\, X_1, y_{q-1}\, X_0 + y_q\, X_1) \\
&= y_{p-1} y_{q-1}\, \mathbb{V}(X_0) + y_p y_q\, \mathbb{V}(X_1) + (y_{p-1} y_q + y_p y_{q-1})\, \mathrm{Cov}(X_0, X_1) \\
&= y_{p-1} y_{q-1}\, \lambda + y_p y_q\, \mu \text{ puisque } X_0 \text{ et } X_1 \text{ sont indépendantes.}
\end{aligned}$$

En montrant par récurrence par exemple que $y_k > 0$ pour tout $k \geqslant 1$, on obtient finalement que : $\mathrm{Cov}(X_p, X_q) > 0$ et donc que les deux variables aléatoires X_p et X_q ne sont pas indépendantes.

Exercice 3.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^n}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, au voisinage de l'infini on a : $\mathrm{e}^{-t^n} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Par comparaison, on en déduit l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^n}$ sur $[1, +\infty[$ et par suite, l'existence de l'intérale I_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive et continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ (question précédente)

Facilement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \in [1, +\infty[\mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in [1, +\infty[, |f_n(t)| \leqslant f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ qui est une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par le Théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

3. Comme l'application $\varphi : u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $[1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de changement de variable , ce sui donne :

$$\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f_n(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$$

4. D'après la question précédente, $n\,I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$.

- Pour tout $u \in [1, +\infty[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, u \in [1, +\infty[, \left|\mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac{1}{n}-1}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-u}$.
- La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

On a donc, par convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = J > 0$

5. Facilement, $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$.

6. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

6.1. Comme $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ qui est 1. Ainsi, $R = 1$.

6.2. Notons D_f l'ensemble de définition de f.

On sait déjà que : $]-1,1[\subset D_f \subset [-1,1]$.

On étudie donc la convergence de la série entière pour $x=1$ et $x=-1$.

• Comme $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} I_n$ diverge et $1 \notin D_f$.

• Pour $x=-1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est alternée (puisque $I_n > 0$) :

- comme $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

- comme pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{e}^{-t^{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^{-t^n}$, la suite (I_n) est décroissante.

Le théorème des séries alternées nous permet alors d'affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ converge et $-1 \in D_f$.

Conclusion : $D_f = [-1,1[$.

Exercice 4.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. Par hypothèse, pour tout vecteur x de E, il existe de façon unique des $x_j \in E_j$ tels que $x = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j$.

Notons alors p_j l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, x \in E,\ p_j(x) = x_j$ (projecteur sur E_j)

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $u^k(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} u^k(x_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, x_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j(x)$,

ce qui prouve que l'on a : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ u^k = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j$ (*).

2. Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.
On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

2.1. Notons $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k$

Alors, $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k\, u^k = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\left(\sum\limits_{k=0}^{r} a_k\, \lambda_j^k\right) p_j\right)$

soit finalement : $P(u) = \sum\limits_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$.

2.2. Prenons dans la relation précédente $P = \prod_{j=1}^{m}(X - \lambda_j)$.

Comme P est scindé, à racines simples et vérifie : $\forall\, j \in [\![1, m]\!]$, $P(\lambda_j) = 0$.

on a : $P(u) = 0$ (endomorphisme nul) et donc, d'après le cours, u est diagonalisable.

2.3. Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{k=1, k\neq j}^{m} \dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$.

2.3.1. Facilement, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]$, on a $L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{lorsque } \; i = j \end{cases}$

2.3.2. • On a déjà $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = m = \dim(\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

• Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre :

Soit $(a_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j = 0$ (polynôme nul)

Or, $\forall\, k \in [\![1, m]\!]$, $\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j\right)(\lambda_k) = \sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j(\lambda_k) = a_k = 0$, et la famille $\mathscr{B}$ est libre.

Conclusion : $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$

2.3.3. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Il existe une unique famille de scalaires $(a_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ tels que $P = \sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j$.

Alors, $\forall\, k \in [\![1, m]\!]$, $P(\lambda_k) = \sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j(\lambda_k) = a_k$ et donc, finalement : $P = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, L_j$.

2.4. Soit $j \in [\![1, m]\!]$. On a : $L_j(u) = \sum_{k=1}^{m} L_j(\lambda_k)\, p_k = p_j$

2.5. Comme u est annulé par $P = \prod_{j=1}^{m}(X - \lambda_j)$, on a déjà : $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.

Soit $j_0 \in [\![1, m]\!]$. Comme $p_{j_0} \neq 0$, il existe au moins $x \in E$ tel que $p_{j_0}(x) \neq 0$.

Alors :

$$u(p_{j_0}(x)) = (u\, o\, L_{j_0}(u))(x) = L_{j_0}(u)(u(x)) = p_{j_0}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, p_j(x)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Big(\lambda_j\, (p_{j_0}\, o\, p_j\Big)(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, (L_{j_0}\, L_j)(u)(x)$$

Or si $j \neq j_0$, $L_{j_0}\, L_j$ a pour racines $\lambda_1, ..., \lambda_m$ et donc, $\Big(L_{j_0}\, L_j\Big)(u) = 0$

Sinon, $L_{j_0}\, L_{j_0} = L_{j_0}$ et donc, $u(p_{j_0}(x)) = \lambda_{j_0}\, p_{j_0}(x)$, ce qui prouve que λ_{j_0} est valeur propre de l'endomorphisme u.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

- Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que "il est trivial que ", " par une récurrence immédiate ", etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PSI.

Nous avons été déçus par le trop grand nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, et d'analyse et qui espèrent venir à bout du sujet grâce à des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.

Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont très rapidement abandonnés.

- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments bidons ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

Conclusion : Nous demandons dans la rédaction des exercices constituant du sujet rigueur et justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

• Commentaires exercice par exercice

Exercice 1

1.

1.1. Beaucoup trop de raisonnements farfelus qui se terminent par "donc $a_{-1} = 0$"...

1.2. Ici encore, beaucoup d'arguments bidons pour arriver à la conclusion proposée par l'énoncé. Certains candidats évoquent une famille "échelonnée en degré" alors qu'il ne s'agit pas de polynômes.

2.

2.1. Oubli récurrent du cas particulier $k = -1$.

2.2. Si la linéarité est bien démontrée, les difficultés arrivent pour prouver que u est un endomorphisme de E.

Les étudiants ne pensent pas toujours à montrer que les images de chaque f_k sont encore dans E.

2.3. Le noyau aurait dû être mieux traité : il faut plus de rigueur dans le raisonnement.

Pour l'image trop peu de candidats savent que l'image d'une base de E par u engendre l'image de u.

2.4. Cette question n'a pas été du tout comprise. La notion d'antécédent est pourtant bien au programme de première année.

2.5. Question bien traitée.

2.6. Des réponses étranges : M n'est pas diagonalisable car $\det(M) = 0$ ou encore, car la matrice M n'est pas diagonale, ou encore car le polynôme caractéristique n'est pas scindé...

2.7. Souvent : l'endomorphisme u^2 n'est pas diagonalisable car u ne l'est pas....

3. et **4.** Les résolutions des équations différentielles sont assez catastrophiques, très longues et souvent fausses.

Trop peu de raisonnement par récurrence correct et rigoureux même pour les étudiants qui ont "intuité" la solution.

5. Questions trop peu traitées puisque l'énoncé ne donnait pas explicitement les h_k.

Exercice 2

1. Trop rares sont les candidats qui ont utilisé les relations coefficients-racines. Beaucoup de lourdeur dans la résolution de cette question, lorsqu'elle est traitée.

2. L'objectif de cette question était de donner l'expression juste de y_n sans que le candidat soit obligé d'effectuer tous les calculs. Était-ce efficace ?

3.

3.1. Rares sont ceux qui ont cité le cours avec l'hypothèse d'indépendance...

3.2. Nous ne sommes pas toujours sûrs que les étudiants sachent vraiment ce qu'ils manipulent : on a vu des intersections de probabilités, ...

Encore une fois, le manque de justifications est flagrant.

3.3. La récurrence double est bien souvent inconnue ou très mal effectuée. En particulier, l'hypothèse de récurrence n'est trop souvent que H_n...

3.4. Peu de choses à dire sur ces questions faciles pas toujours rédigées de façon rigoureuse.

3.5. L'indépendance est trop peu citée.

3.6. Calculs très hasardeux et cours pas toujours su.

Exercice 3

1. La continuité de la fonction $t \mapsto \exp(-t^n)$ sur $[1, +\infty[$ est trop souvent oubliée.

Certains pensent que la fonction constante, égale à 1, est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On voit des arguments tels que : la fonction tend vers 0 en l'infini et donc, on peut la prolonger par continuité en l'infini et donc, l'intégrale est faussement impropre en l'infini...

Enfin certains connaissent une primitive de la fonction $t \mapsto \exp(-t^n)$

2. La domination n'est pas toujours bien justifiée alors que dans l'ensemble, le théorème de convergence dominée est bien appliqué.

3. Changement de variable pas toujours bien justifié.

4. Malgré une bonne expression de l'intégrale, beaucoup de candidats ne voient pas qu'il faut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée.

A noter de nombreuses limites qui dépendent de n...

5. Question simple en général pas trop mal traitée si ce n'est que le fait que J soit non nulle n'est pas suffisamment évoqué.

6.

6.1. Pas de problème pour le rayon de convergence (si ce n'est qu'il ne faut pas oublier les valeurs absolues).

6.2. Certains candidats n'ont pas vu la différence avec la question précédente.

Exercice 4

1. Il fallait dans cette question définir les projecteurs, ce qui n'a pas été toujours compris.

2.
2.1. Trop de candidats pensent que les polynômes sont des applications linéaires...

2.2. Malgré l'indication certains candidats arrivent à prouver que le polynôme caratéristique est scindé à racines simples.

2.3. Tout repose que la question **2.3.1.**. A noter que des arguments tels que 'polynômes étagés en degrés' ne sont pas valables ici.

2.4. et **2.5.** Questions peu traitées.