

Correction Sujet principal e3a MP 2021

Mission prolongée pour la sonde Juno

Première partie Les caractéristiques de Jupiter

I.1 Observer Jupiter depuis la Terre

1. La troisième loi de Kepler dans le cadre du système { Jupiter et ses satellites } :

Le rapport du carré de la période de révolution des satellites et du cube du demi grand axe de l'ellipse décrite

par le centre de ces satellites est égale à $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J}$ où M_J désigne la masse de Jupiter soit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J}$.

En s'appuyant sur la troisième loi de Kepler, on effectue par exemple la régression linéaire $T^2 = f(a^3)$:

$$T^2 = \underbrace{3,1 \cdot 10^{-16}}_{=\alpha} \times a^3 \text{ avec } R^2 = 0,999$$

Les résultats issus de l'observation s'accordent bien avec une telle loi et alors $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J} = \alpha$ soit $M_J = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\alpha}$.

Application numérique : $M_J = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ en cohérence avec la valeur indiquée dans le sujet.

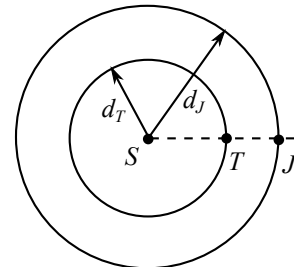
2. La masse volumique moyenne : $\rho = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} = \frac{3M_J}{4\pi R_J^3}$.

Application numérique : $\rho = 1,32 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

3. La configuration Soleil - Terre - Jupiter pour laquelle Jupiter est vue sous un angle maximal est la suivante :

Alors dans l'approximation des petits angles $\alpha_{\max} \approx \frac{2R_J}{d_J - d_T}$ soit

Application numérique : $\alpha_{\max} \approx 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.



4. En appliquant la troisième loi de Kepler au { système solaire } :

$\frac{T_J^2}{d_J^3} = \frac{T_T^2}{d_T^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_s}$ où M_s désigne la masse du Soleil donc $T_J = \left(\frac{d_J}{d_T}\right)^{3/2} T_T$.

La valeur de la période sidérale de Jupiter : **Application numérique :** $T_J = 4,33 \cdot 10^3 \text{ j}$.

La durée Δt séparant deux oppositions de Jupiter vérifie : $2\pi \frac{\Delta t}{T_T} - 2\pi \frac{\Delta t}{T_J} = 2\pi$ soit $\Delta t = \frac{T_T T_J}{T_J - T_T}$ soit

$\Delta t = 3,99 \cdot 10^2 \text{ j}$ (Terre et Jupiter décrivant leurs orbites respectives dans le même sens).

5. L'œil n'accomode pas lorsque l'objet examiné est situé au PR de l'œil c'est-à-dire pour un œil emmétrope à l'infini.

En assimilant légitimement Jupiter à un objet situé à l'infini, l'image définitive devant être rejetée à l'infini par la lunette astronomique pour une vision sans accommodation :

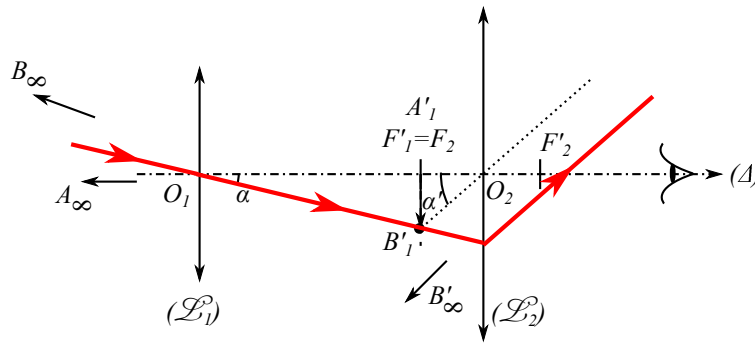
$$A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 = F'_1 = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'_\infty$$

Pour qu'il en soit ainsi, le foyer principal image de l'objectif \mathcal{L}_1 doit être confondu avec le foyer principal objet de l'oculaire \mathcal{L}_2 c'est-à-dire que la distance entre l'objectif et l'oculaire est $\ell = f'_1 + f'_2$.

Dans ce cas, les foyers de la lunette sont rejetés à l'infini et le système est qualifié de **système afocal**.

6. Les conditions de Gauss :

- les rayons lumineux sont peu inclinés par rapport à l'axe optique ;
- les rayons lumineux sont peu écartés de l'axe optique.



7. Dans l'approximation des petits angles (non orientés) :

- $\tan \alpha \sim \alpha = \frac{A'_1 B'_1}{f'_1}$;
- $\tan \alpha' \sim \alpha' = \frac{A'_1 B'_1}{f'_2}$.

Alors $G = \frac{f'_1}{f'_2}$ soit **Application numérique :** $G = 10$.

Dans une configuration d'opposition de Jupiter : $\alpha_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-4}$ rad alors l'angle sous lequel est vue Jupiter à travers la lunette est $\alpha'_{\max} = G \alpha_{\max}$ soit $\alpha'_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-3}$ rad.

Constatant que $\alpha'_{\max} \approx 5 \varepsilon_{\text{œil}}$ avec $\varepsilon_{\text{œil}} = 4,4 \cdot 10^{-4}$ rad, Jupiter pourra être discernée correctement avec cette lunette.

I.2 La trajectoire de la sonde Juno

I.2.1 S'échapper de la Terre

8. Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Le système étudié est { l'objet M de masse m } soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

Ce système est conservatif.

Par définition de la vitesse de libération de M, l'état considéré est un **état de diffusion** et la vitesse de M infiniment éloigné de la Terre est nulle. Donc dans cet état particulier, l'énergie mécanique de M est nulle.

Initialement, M est à la surface de la Terre.

Par conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2} m v_\ell^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{R_T} = 0$ soit $v_\ell = \sqrt{\frac{2 \mathcal{G} M_T}{R_T}} = \sqrt{2 g R_T}$.

Application numérique : $v_\ell = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

I.2.2 Caractéristiques de la trajectoire

9. On peut approximer le mouvement du référentiel jupiterocentrique à un **mouvement de translation rectiligne uniforme** dans le référentiel héliocentrique sur la durée T_{Juno} si la période de révolution de la sonde Juno T_{Juno} est **largement inférieure à la période de révolution sidérale de Jupiter**.

Ceci est bien vérifié puisque $T_{\text{Juno}} = 53 \text{ j} \ll T_J = 4,33 \cdot 10^3 \text{ j}$.

L'affirmation précédente assure son caractère **approximativement** galiléen au référentiel jupiterocentrique, le référentiel héliocentrique étant lui-même considéré comme galiléen.

En effet : $\frac{\|\vec{F}_{ie}\|}{\|\vec{F}_{g,J \rightarrow \Sigma}\|} \sim \frac{d_J}{a} \left(\frac{T_{\text{Juno}}}{T_J} \right)^2 \sim 2 \cdot 10^{-2} \ll 1$ avec a : demi-grand axe de l'ellipse décrite par le centre de Juno.

10. Le théorème du moment cinétique stipule que : $\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(F_{O \rightarrow P})}$ et comme $\overrightarrow{F_{O \rightarrow P}}$ est une **force**

centrale de pôle O $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(F_{O \rightarrow P})} = \overrightarrow{0}$.

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}$ est alors conservé lors du mouvement de la sonde ce qui se traduit par :

$$\forall t, \overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}(t) = \overrightarrow{r}(t) \wedge (m \overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}}}(t)) = \overrightarrow{r_0} \wedge (m \overrightarrow{v_0})$$

En supposant les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_0}$ à $t = 0$ et position $\overrightarrow{r_0}$ à $t = 0$ non colinéaires, on en déduit que quelque soit l'instant t considéré, les vecteurs position $\overrightarrow{r}(t)$ et vitesse $\overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}}}(t)$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{Cte} \neq \overrightarrow{0}$ garantissant que le mouvement est **plan**.

Il s'agit du plan $\mathcal{P}(O, \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{v_0})$ de normale $\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}$. Ce plan doit contenir le centre du champ de force.

11. On se place alors en paramétrage cylindrique de base $\mathcal{B}(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ tel que $\overrightarrow{u_z}$ soit colinéaire de même sens à $\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}$.

Alors : $\overrightarrow{r} = r \overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}}} = \left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{r} \overrightarrow{u_r} + r \dot{\theta} \overrightarrow{u_\theta}$.

12. On en déduit :

$$\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \wedge m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m r^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Et donc $\overrightarrow{C} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}}{m} = r^2 \dot{\theta} \overrightarrow{u_z}$.

\overrightarrow{C} est donc un vecteur constant au cours du mouvement entraînant que la quantité $C = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{u_z} = r^2 \dot{\theta}$ soit conservée au cours du mouvement de la sonde.

13. Par définition, l'énergie mécanique (qui est **conservée** puisque $\overrightarrow{F_{O \rightarrow P}}$ est une force conservative dérivant de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $\mathcal{E}_p(P) = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$) a pour expression $\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{C,P/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p(P)$

soit
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_{P/\mathcal{R}}^2 - \frac{\mathcal{G} m M}{r}$$

et comme $v_{P/\mathcal{R}}^2 = (\dot{r})^2 + (r \dot{\theta})^2$ alors $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 - \mathcal{G} \frac{mM}{r}$.

Enfin l'expression de C permet de découpler les grandeurs r et θ selon : $r \dot{\theta} = \frac{C}{r}$.

On en déduit alors que $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM}{r}$.

On définit l'énergie potentielle effective de P par $U_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM}{r}$.

14. On a $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{\text{eff}}(r) = +\infty$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} U_{\text{eff}}(r) = 0$. Voici alors l'allure du graphe de la fonction $r \mapsto U_{\text{eff}}(r)$ en page suivante.

- Dans le cas d'une **trajectoire circulaire** : une seule valeur de r est possible et correspond au minimum de U_{eff} : r_0 . Il s'agit d'un **état lié**.
- Pour $U_{\text{eff, min}} < U_{\text{eff}} < 0$: $r \in [r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$: l'**état est lié** et la trajectoire décrite par P est une **ellipse** dont l'un est foyers est O.
- Pour $U_{\text{eff, min}} = 0$: $r \in [r_0, +\infty[$: il s'agit d'un **état de diffusion** et la trajectoire décrite par P est une **parabole**.
- Pour $U_{\text{eff, min}} > 0$: $r \in [r_1, +\infty[$: il s'agit d'un **état de diffusion** et la trajectoire décrite par P est une **branche d'hyperbole**.

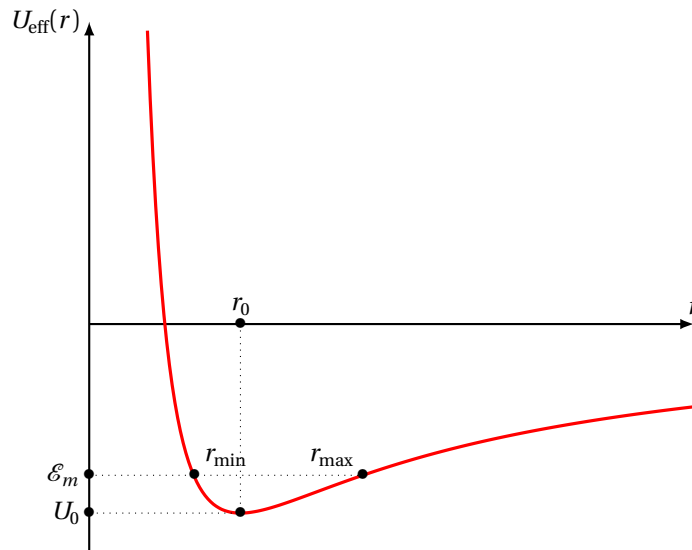


FIGURE 1 – Tracé de la courbe d'énergie potentielle U_{eff}

15. En appliquant la troisième loi de Kepler au système { Jupiter - sonde }, le demi grand axe de l'ellipse décrite

par la sonde est estimée à $a = \left(\frac{\mathcal{G} M_J T^2}{4 \pi^2} \right)^{1/3}$ avec T la période de la sonde : $T = 53 \text{ j}$.

Application numérique : $a = 4,1 \cdot 10^9 \text{ m}$.

On rappelle l'expression de l'énergie mécanique de la sonde en fonction du demi grand axe de l'ellipse a :

$$\mathcal{E}_m = -\mathcal{G} \frac{m M_J}{2a} \text{ et donc } r_{\min} + r_{\max} = 2a.$$

À l'apogée A ($r = r_{\max}$) et au périhélie P ($r = r_{\min}$) comme $\dot{r} = 0$, l'énergie mécanique prend la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{m C^2}{2 r^2} - \mathcal{G} \frac{m M_J}{r} \text{ donc } (r_{\min}, r_{\max}) \text{ solution de } 2 \mathcal{E}_m r^2 + 2 \mathcal{G} m M_J r - m C^2 = 0$$

En utilisant une relation coefficients-racines d'un polynôme, on obtient : $r_{\min} r_{\max} = -\frac{m C^2}{2 \mathcal{E}_m}$.

I.3 La structure interne de Jupiter

I.3.1 Électrostatique et gravitation universelle

16. La force d'interaction gravitationnelle exercée par une distribution de masse Σ sur un point matériel P de

masse m : $\vec{F}_{\Sigma \rightarrow P} = m \vec{G}(P)$.

17. On donne :

- Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;
- Équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire : $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$.

Les masses sont des **grandeurs positives** donc la force d'interaction gravitationnelle est **toujours attractive** contrairement aux charges électriques pouvant être de même signe ou de signes contraires entraînant que la force d'interaction électrique peut être **répulsive** ou **attractive**.

18. L'équation $\text{rot } \vec{G} = \vec{0}$ assure que \vec{G} **dérive d'un potentiel gravitationnel** Φ .

Dans ce cas de figure : $\vec{G} = -\text{grad } \Phi$.

Sachant que $\Delta \Phi = \text{div}(\text{grad } \Phi)$ soit $\Delta \Phi = -\text{div } \vec{G}$ donc $\Delta \Phi = 4\pi \mathcal{G} \rho$.

19. Énoncé du théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée et orientée (Σ_G) est égale au rapport de la charge électrique intérieure à cette surface et de la permittivité du vide ϵ_0 soit

$$\oiint_{M \in \Sigma_G} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

Sachant que l'analogie de $\frac{1}{\epsilon_0}$ est $-4\pi \mathcal{G}$ et l'analogie de la charge électrique est la masse, le théorème de

Gauss pour la gravitation stipule

$$\oiint_{M \in \Sigma_G} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}.$$

I.3.2 Distribution sphérique de masse non homogène

20. La distribution des masses étant **invariante par toute rotation d'axe passant par O**, \vec{G} ne dépend que de r .

Tout plan contenant la droite (M) est **plan de symétrie** de la distribution des masses donc \vec{G} est radial.

En conclusion : $\vec{G}(M) = -G(r) \vec{u}_r$ où $G(r) > 0$.

21. La masse δm d'une coquille sphérique de rayon compris entre r et $r + dr$ étant : $\delta m = \rho(r) \times 4\pi r^2 dr$

alors $M(r) = \int_0^r 4\pi \rho(r') r'^2 dr'$ sous réserve d'une distribution de masse à **répartition sphérique** de masse.

22. La surface de Gauss étant une sphère de centre O et de rayon $r > R$: $M_{\text{int}} = M_J = \int_0^{R_J} 4\pi \rho(r) r^2 dr$: masse de Jupiter.

On en déduit l'expression du champ gravitationnel à l'extérieur de la planète : $G(r) 4\pi r^2 = 4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}$ donc

$$G(r) = \mathcal{G} \frac{M_J}{r^2}.$$

Le graphe de $r \mapsto G(r)$ pour $r \geq R_J$:

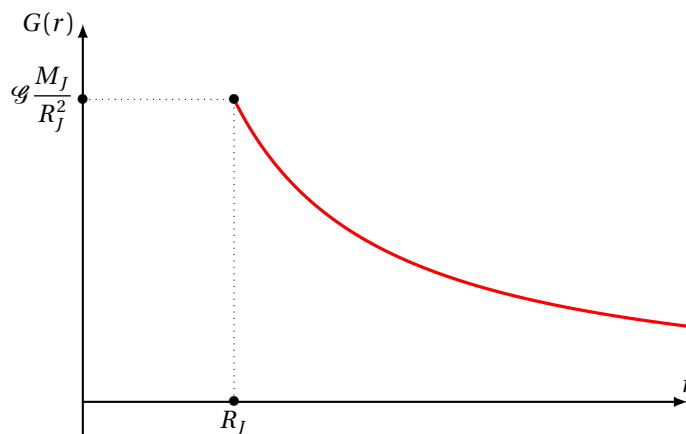


FIGURE 2 – Tracé du graphe $r \mapsto G(r)$ pour $r \geq R_J$

Sachant que $\vec{G} = -\vec{\text{grad}} \Phi$ alors $G(r) = \frac{d\Phi}{dr}$ donc pour $r \geq R_J$: $\Phi(r) = -\mathcal{G} \frac{M_J}{r}$ avec $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = 0$.

23. Chaque particule de fluide possédant dans le référentiel jupiterocentrique un mouvement circulaire uniforme de rayon $r' = r \sin \theta$ alors l'accélération du centre d'inertie de cette particule de fluide est **centripète** et a pour expression $\vec{a}_{P/\mathcal{R}} = -\omega_{\text{sid}}^2 r \sin \theta \vec{u}_{r'}$ où $\vec{u}_{r'}$ est le vecteur radial des coordonnées cylindriques d'axe (O, \vec{u}_z) .

24. Le référentiel lié à Jupiter n'est pas galiléen car en mouvement de rotation d'axe (O, \vec{u}_z) par rapport au référentiel jupiterocentrique galiléen.

Chaque particule de fluide est donc soumise en particulier à la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{\delta F_{ie}} = -\delta m \overrightarrow{a_{p|\mathcal{R}}}$ soit $\overrightarrow{\delta F_{ie}} = +\rho \omega_{\text{sid}}^2 r \sin \theta d\tau \overrightarrow{u_{r'}}$.

Cette force étant **axifuge** et de norme d'autant plus importante que la particule de fluide est éloignée de l'axe de rotation, l'effet de cette force sera davantage ressenti par les particules de fluide situées au niveau de l'équateur et cet effet sera nul pour les particules de fluides situées aux pôles.

En adoptant un modèle élastique de la planète Jupiter, cette force est responsable d'un écrasement de la planète aux pôles et d'un allongement de celle-ci au niveau de l'équateur. D'où la forme ellipsoïdale de la planète.

25. Si Jupiter était assimilable en l'absence de rotation propre à une boule pleine, homogène, de masse volumique uniforme, alors $I = \frac{8\pi}{15} \times \frac{3}{4\pi} \frac{M_J}{R_J^3} \times R_J^5 = \frac{2}{5} M_J R_J^2$ et donc $K = \frac{2}{5}$.

26. La connaissance de K permettra d'obtenir une première indication sur la répartition des masses à l'intérieur de Jupiter. Par exemple, si $K < \frac{2}{5}$, la matière est davantage concentrée au centre de la planète.

27. On pose $g(x) = x^2 \exp\left(-\frac{mx^2}{2k_B T}\right)$ alors $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{mx^3}{k_B T} = 0$ donc $x = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$.

La vitesse la plus probable d'agitation thermique est donc $v_c = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$.

28. La vitesse de libération à la surface de Jupiter est estimée selon $v_{\ell,J} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{R_J}}$.

Application numérique : Estimation des vitesses les plus probables :

- On prendra pour la température à la surface de la Terre : $T_{T,\text{surf}} = 293 \text{ K}$;
- On prendra pour la température à la surface de Jupiter : $T_{J,\text{surf}} = 170 \text{ K}$ (cf. **figure 6**).

	v_c (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	v_{ℓ} (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
Terre	Hydrogène : $v_{c,H} = 2,2 \cdot 10^3$ Hélium : $v_{c,He} = 1,1 \cdot 10^3$	$v_{\ell,T} = 1,1 \cdot 10^4$
Jupiter	Hydrogène : $v_{c,H} = 1,7 \cdot 10^3$ Hélium : $v_{c,He} = 8,4 \cdot 10^2$	$v_{\ell,J} = 6,0 \cdot 10^4$

On constate que l'**écart entre la vitesse la plus probable et la vitesse de libération** est plus important dans le cas de Jupiter que dans le cas de la Terre.

Cela signifie que la distribution des vitesses est davantage écartée du côté des valeurs élevées des vitesses dans le cas de la Terre et donc l'atmosphère de la Terre est moins riche en dihydrogène et en hélium gazeux que celle de Jupiter.

Seconde partie

Électronique embarqué dans la sonde

II.1 Traitement thermique de cartes électroniques

II.1.1 Conduction thermique dans une plaque

29. On considère une tranche de carte d'épaisseur dx située entre x et $x + dx$. En régime stationnaire, il n'y a pas d'accumulation d'énergie interne.

Il n'y a pas de terme de production alors $\Phi_{\text{th}}(x) = \Phi_{\text{th}}(x + dx)$ soit $\left. \frac{d\Phi_{\text{th}}}{dx} \right|_x = 0$.

De plus $\Phi_{\text{th}}(x) = j_{\text{th}}(x) \times S$ alors $\left. \frac{dj_{\text{th}}}{dx} \right|_x = 0$.

Enfin d'après la loi de Fourier $\overrightarrow{j_{\text{th}}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ alors $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$.

En intégrant successivement deux fois par rapport à $x : \forall x \in [0, e], T(x) = A + Bx$.

L'examen des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_1 & \Rightarrow A = T_1 \\ T(x=e) = T_2 & \Rightarrow B = \frac{T_2 - T_1}{e} \end{cases}$$

Et donc $\forall x \in [0, e], \quad T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e} x$.

30. La puissance thermique transférée de la plaque 1 vers la plaque 2 : $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = j_{th} \times S = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} S$.

Donc $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{e}$.

31. L'analogie attendue :

- la puissance thermique transférée $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}$ est l'analogie de l'intensité $i_{1 \rightarrow 2}$ du courant électrique ;
- la différence de température $T_1 - T_2$ est l'analogie de la différence de potentiel électrique $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$.

On définit alors la résistance thermique de la plaque par $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e}{\lambda S}$.

II.2.2 Assemblage multi-cartes

32. L'ensemble est assimilable en régime stationnaire dans le cadre des hypothèses effectuées à la **mise en série** de N résistances thermiques d'expression $\frac{1}{S} \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$.

On en déduit alors l'expression de la résistance thermique d'un tel matériau d'épaisseur e : $R_e \approx \frac{N}{S} \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$.

En écrivant que $e \approx N(e_1 + e_2)$ alors $R_e \approx \frac{e}{S} \left(\frac{e_1}{\lambda_1(e_1 + e_2)} + \frac{e_2}{\lambda_2(e_1 + e_2)} \right)$.

On définit alors la conductivité thermique λ équivalente par $\frac{1}{\lambda} = \frac{e_1}{\lambda_1(e_1 + e_2)} + \frac{e_2}{\lambda_2(e_1 + e_2)}$ soit $\lambda = (e_1 + e_2) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}$.

33. **Analyse de la pertinence physique du résultat :**

- **1^{er} cas :** $\lambda_1 = \lambda_2$ alors $\lambda = \lambda_1$. Ceci était attendu puisque du point de vue thermique, le matériau est assimilable à une plaque homogène de surface S , d'épaisseur e et de conductivité thermique $\lambda_1 = \lambda_2$.
- **2^{ème} cas :** $e_1 \ll e_2$ alors $\lambda = \lambda_2$. Là encore ce résultat était prévisible puisque la résistance thermique de chaque plaque est quasi nulle du fait de sa faible épaisseur. D'un point de vue thermique, le matériau est assimilable à une plaque de surface S , d'épaisseur e constituée du matériau de conductivité thermique λ_2 .

II.2 Structure cristalline du germanium

34. On donne page suivante la maille de structure du germanium.

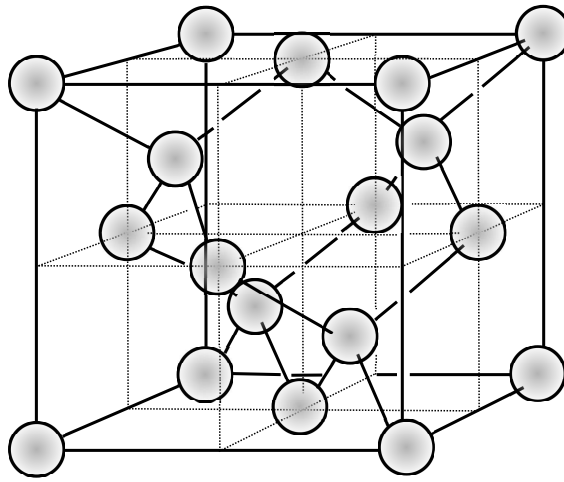
Des atomes de germanium occupant des sites tétraédriques de la structure hôte alors la **coordination Ge/Ge : [4]**.

35. La population de la maille : $z_{Ge} = 4 \times 1 + 6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} = 8$.

La compacité de la structure : $\mathcal{C} = \frac{z_{Ge} \times \frac{4\pi}{3} R_{Ge}^3}{a^3}$.

Sachant qu'il y a tangence des atomes selon la demie diagonale d'un cube d'arête $\frac{a}{2}$: $R_{Ge} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Alors $\mathcal{C} = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} = 0,34$. Structure peu compacte (résultat attendu).



36. La masse volumique : $\rho = \frac{z_{\text{Ge}} \cdot M_{\text{Ge}}}{N_A a^3}$ soit **Application numérique** : $\rho = 5,32 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Troisième partie
Vers des accumulateurs électrochimiques de nouvelle technologie

III.1 Accumulateur à base de lithium et de sodium

37. Les **avantages** d'un accumulateur sodium - ion par rapport à l'accumulateur lithium - ion :

- le sodium est bien plus abondant que le lithium. Son exploitation et son recyclage posent moins de problèmes en terme de pollution. Le coût est également réduit.
- la durée d'une charge est environ 10 plus faible comparée à la charge d'un accumulateur lithium - ion équivalent.

Un **inconvenient majeur** : la densité d'énergie électrique est faible.

38. **Configuration électronique dans l'état fondamental** : $1s^2 2s^1$.

L'atome de lithium faisant partie de la famille des alcalins est caractérisée par la facilité de céder son unique électron de valence (énergie de première ionisation faible) afin d'acquérir la structure électronique de l'atome d'hélium (gaz noble).

Le lithium est donc **très peu électrochimique**. Cela en fait un **bon réducteur** et donc le potentiel standard du couple $Li^+ / Li_{(s)}$ est bas.

39. Les équations demandées :

- $2 Li_{(s)} + 2 H_{(aq)}^+ \rightleftharpoons 2 Li_{(aq)}^+ + H_{2(g)} \quad [1]$;
- $2 Na_{(s)} + 2 H_{(aq)}^+ \rightleftharpoons 2 Na_{(aq)}^+ + H_{2(g)} \quad [2]$;

Les constantes d'équilibres standards associées à 298 K :

- $K_1^\circ = 10^{\frac{2}{0,06} (E_{H_{(aq)}^+ / H_{2(g)}}^\circ - E_{Li_{(aq)}^+ / Li_{(s)}}^\circ)}$ soit $K_1^\circ = 10^{+100}$;
- $K_2^\circ = 10^{\frac{2}{0,06} (E_{H_{(aq)}^+ / H_{2(g)}}^\circ - E_{Na_{(aq)}^+ / Na_{(s)}}^\circ)}$ soit $K_2^\circ = 10^{+90}$;

Les deux réactions sont **quantitatives**.

40. La réaction [1] est plus favorable que [2]. Du point de vue thermodynamique, le lithium métallique est plus réactif que le sodium métallique vis-à-vis de l'eau au sens où la réaction est plus quantitative.

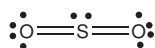
L'examen des courbes intensité-potential montrent que l'intensité du courant de corrosion est plus importante dans le cas de la réduction du proton de l'eau par le sodium.

Aussi la **cinétique de réduction** de l'eau par le sodium est plus élevée que celle liée à la réduction de l'eau par le lithium.

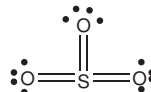
III.2 Accumulateur à base de soufre

41. Les schémas de Lewis demandés :

Molécule de dioxyde de soufre :



Molécule de trioxyde de soufre :



42. D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r \mathcal{H}^\circ = 2 \Delta_f \mathcal{H}_{\text{SO}_3(\text{g})}^\circ - \Delta_f \mathcal{H}_{\text{O}_2(\text{g})}^\circ - 2 \Delta_f \mathcal{H}_{\text{SO}_2(\text{g})}^\circ \quad \text{soit } \underline{\text{Application numérique}} : \quad \Delta_r \mathcal{H}^\circ = -197,8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_r S^\circ = 2 S_{m, \text{SO}_3(\text{g})}^\circ - S_{m, \text{O}_2(\text{g})}^\circ - 2 S_{m, \text{SO}_2(\text{g})}^\circ \quad \text{soit } \underline{\text{Application numérique}} : \quad \Delta_r S^\circ = -187,8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

L'approximation d'Ellingham consiste à considérer $\Delta_r \mathcal{H}^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ **indépendants de la température** en l'absence de changements d'état.

On en déduit alors $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r \mathcal{H}^\circ - T \Delta_r S^\circ$.

43. D'après la relation de van't Hoff : $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ}{RT^2}$.

La réaction étant **exothermique**, $\Delta_r \mathcal{H}^\circ < 0$ et donc K° **diminue lorsque T augmente**.

Une augmentation de la température induit un déplacement de l'état d'équilibre dans le **sens indirect** de l'écriture de l'équation de la réaction.

44. Sachant $K^\circ(T) = \frac{(a_{\text{SO}_3(\text{g})}^{\text{eq}})^2}{(a_{\text{SO}_2(\text{g})}^{\text{eq}})^2 a_{\text{O}_2(\text{g})}^{\text{eq}}}$ et

$$a_{\text{SO}_3(\text{g})} = x_{\text{SO}_3(\text{g})} \frac{P}{P^\circ} \quad ; \quad a_{\text{SO}_2(\text{g})} = x_{\text{SO}_2(\text{g})} \frac{P}{P^\circ} \quad ; \quad a_{\text{O}_2(\text{g})} = x_{\text{O}_2(\text{g})} \frac{P}{P^\circ}$$

Alors : $K^\circ(T) = \frac{(x_{\text{SO}_3(\text{g})}^{\text{eq}})^2}{(x_{\text{SO}_2(\text{g})}^{\text{eq}})^2 x_{\text{O}_2(\text{g})}^{\text{eq}}} \frac{P^\circ}{P^{\text{eq}}}$.

45. Une augmentation de pression induit une **diminution de Q_r à composition et température constantes**.

Ceci entraîne alors un déplacement de l'état d'équilibre dans le **sens direct** de l'écriture de l'équation de la réaction.

46. D'après l'analyse précédente, le rendement augmentera en travaillant à **pression P élevée** et à **basse température**. L'utilisation de pressions élevées engendre néanmoins des coûts de production supplémentaires en particulier pour sécuriser l'installation industrielle. L'utilisation de catalyseurs comme $V_2O_5(\text{s})$ permet d'obtenir une cinétique de synthèse correcte même à température modérée.

- Fin -