

Epreuve de Physique – Chimie PSI

Corrigé

PARTIE PHYSIQUE

I – Haut-parleur électrodynamique

A – Etude générale

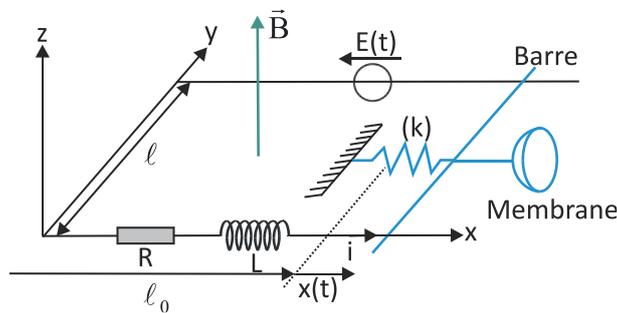


Figure 2

Q.1. On oriente le circuit dans le sens représenté par le courant induit i représenté sur le schéma. La surface \vec{S} est donc orientée dans le sens de \vec{B} et le flux Φ du champ magnétique est

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B(\ell_0 + x(t))\ell$. D'après la loi de Faraday, on a la f.é.m. induite $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, soit

$$e = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

Q.2. D'après la loi des mailles, on a, la f.é.m. $e(t)$ orientée dans le sens du courant induit i :

$$E(t) + e - Ri - L \frac{di}{dt} = 0, \text{ soit } E(t) - B\ell v(t) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (\text{E.E.})$$

Q.3. Bilan des forces s'exerçant sur la barre :

⇒ le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

⇒ réactions du support en A et B : \vec{R}_A et \vec{R}_B

⇒ force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = -kx\vec{e}_x$

⇒ Force de frottement fluide : $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$

⇒ Force de Laplace $\vec{F}_L = i\ell\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = iB\ell\vec{e}_x$

Principe fondamental de la dynamique : $m_T \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\underbrace{\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B}_{=0} \right) - kx\vec{e}_x - \alpha\vec{v} + i\ell B\vec{e}_x$, soit

$$m_T \frac{dv}{dt} = -kx - \alpha v + i\ell B \text{ (E.M)}$$

Q.4. On multiplie l'équation électrique par $i(t)$ et l'équation mécanique par $v(t)$ pour faire apparaître les puissances électrique et mécanique :

$$(EE) \times i : E i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + B\ell v_y i_{(t)} \quad (1)$$

$$(EM) \times v : m_T v \frac{dv}{dt} = -kx \frac{dx}{dt} - \alpha v^2 + B\ell i(t)v(t) \quad (2)$$

$$\text{En faisant (1) - (2) : } E i - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_T v^2 \right) = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) + \alpha v^2$$

$$\text{soit } E i = Ri^2 + \alpha v^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_T v^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Commentaire : la puissance électrique fournie par le générateur sert à faire varier les énergies cinétique de la barre, potentielle élastique du ressort et magnétique de la bobine), et à compenser les pertes par effet Joule et par frottement visqueux. La puissance αv^2 dissipée par la force de frottement correspond à la puissance sonore émise par le haut-parleur.

Q.5. Puisque d'après la première question on a $e = -B\ell v$, alors $P_{\text{fem}} = -B\ell i v$.

D'autre part, la force de Laplace s'exerçant sur la barre est $\vec{F}_L = iB\ell\vec{e}_x$, d'où la puissance de la force de Laplace : $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = iB\ell v$, de sorte que $P_{\text{fem}} + P_L = 0$.

Q.6. Les équations électrique et mécanique s'écrivent en régime sinusoïdal forcé :

$$(E.E.) \quad \underline{E} = (R + jL\omega) \underline{i} + B\ell \underline{v}$$

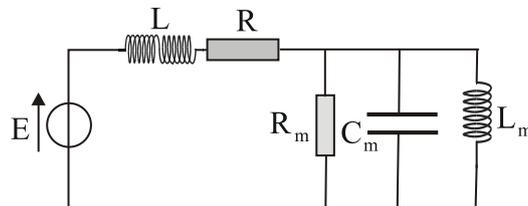
$$(E.M) \quad j m_T \omega \underline{v} = -\frac{k}{j\omega} \underline{v} - \alpha \underline{v} + B\ell \underline{i}$$

$$\text{soit } \underline{E} = (R + jL\omega) \underline{i} + B\ell \times \frac{B\ell}{\alpha + j \left(m_T \omega - \frac{k}{\omega} \right)} \underline{i} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m) \underline{i} \quad \text{avec } \underline{Z}_m = \frac{(B\ell)^2}{\alpha + j \left(m_T \omega - \frac{k}{\omega} \right)}$$

$$\text{Q.7. On a } \underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{1}{(B\ell)^2} \left[\alpha + j m_T \omega + \frac{k}{j\omega} \right] = \frac{\alpha}{(B\ell)^2} + j \frac{m_T}{(B\ell)^2} \omega + \frac{1}{j\omega (B\ell)^2} ,$$

de la forme $\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}$ avec $R_m = \frac{(B\ell)^2}{\alpha}$, $C_m = \frac{m_\tau}{(B\ell)^2}$ et $L_m = \frac{(B\ell)^2}{k}$.

Q.8. D'après ce qui précède, l'impédance motionnelle correspond à l'association parallèle d'un résistor, d'une bobine et d'un condensateur. On a donc le schéma électrique équivalent suivant :



Q.9. Pour un régime périodique, on a $\left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T d \left(\frac{1}{2} m_\tau v^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) = 0$,
soit $\langle E i \rangle = \langle R i^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle$.

En moyenne, la puissance fournie par le générateur est transmise à l'onde sonore, l'autre partie étant dissipée par effet Joule.

Q.10. On a montré à la question 5 que $\langle E i \rangle = \langle R i^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle = \langle P_J \rangle + \langle P_{son} \rangle$, d'où le rendement

$$\eta = \frac{\langle P_{son} \rangle}{\langle E i \rangle} = \frac{\langle P_{son} \rangle}{\langle P_J \rangle + \langle P_{son} \rangle} = \frac{1}{1 + \langle P_J \rangle / \langle P_{son} \rangle}$$

Puisque $\underline{v} = \frac{B\ell}{\alpha + j \left(m_\tau \omega - \frac{k}{\omega} \right)} \underline{i}$, on a $\langle P_{son} \rangle = \frac{\alpha}{2} \text{Re}(\underline{v} \cdot \underline{v}^*)$, soit $\langle P_{son} \rangle = \frac{\alpha}{2} \frac{(B\ell)^2}{\alpha^2 + \left(m_\tau \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2} |\underline{i}|^2$ et

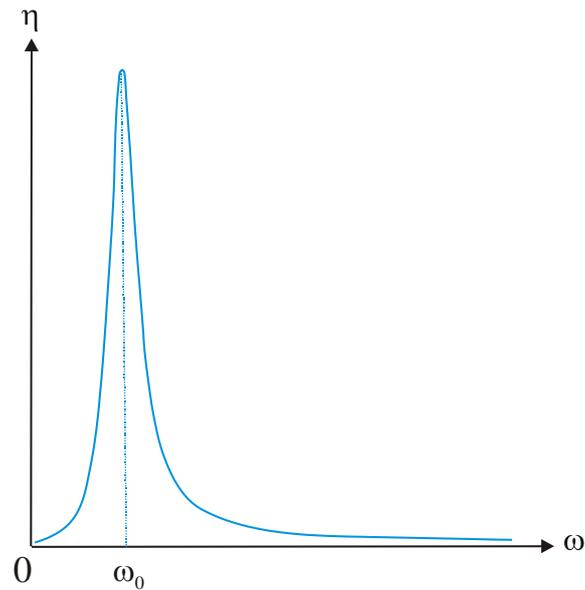
$$\langle P_J \rangle = \frac{R}{2} \text{Re}(\underline{i} \cdot \underline{i}^*) = \frac{R}{2} |\underline{i}|^2.$$

Il vient donc $\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha(B\ell)^2} \left[\alpha^2 + \left(m_\tau \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + \frac{1}{\alpha^2} \left(m_\tau \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2 \right]}$,

soit avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_\tau}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$$

Q.11. On retrouve la forme classique associée à un phénomène de résonance / p-bande 2°ordre.



B – Membranes élastiques – Figures de Chladni

Q.12. Les lignes noires correspondent aux nœuds de vibration.

Q.13. On cherche une solution de l'équation de propagation sous la forme de fonctions à variables séparées : $z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$.

L'équation de propagation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ s'écrit alors $YT \frac{d^2 X}{dx^2} + XT \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{XY}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}$.

En divisant l'ensemble par $z = XYT$: $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$

Le terme de droite ne dépend a priori que du temps t alors que le terme de gauche ne dépend a priori que des variables X et Y ; étant donné l'égalité, on en déduit que chaque terme est une constante, soit $\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \pm \gamma^2$, d'où $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \pm \gamma^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$.

Le même raisonnement nous dit que le terme de gauche ne peut dépendre que de X , alors que le terme de droite ne peut dépendre que de y . Chaque terme est donc constant, ce qui fait que l'on peut écrire : $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \pm \alpha^2$ et $\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \beta^2$.

Q.14. Les solutions de $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2$ sont hyperboliques et ne permettent pas de respecter les conditions aux limites (à moins de donner $X = 0 \forall x$). Il en est de même pour l'équation $\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2$.

Q.15. On a donc obligatoirement $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2$ et $\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2$, soit $\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0$ et $\frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0$.

La solution générale de $\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0$ est $X(x) = X_0 \sin \alpha x + X_1 \cos \alpha x$.

Conditions aux limites : $X(0) = X_1 = 0$ et $X(a) = 0$ amène à $\sin(\alpha a) = 0$, soit $\alpha a = m\pi$, $\alpha = m \frac{\pi}{a}$, $m \in \mathbb{N}^*$, d'où $X(x) = X_0 \sin\left(m \frac{\pi x}{a}\right)$.

De même, $Y(y) = Y_0 \sin \beta y + Y_1 \cos \beta y$

Conditions aux limites : $Y(0) = Y_1 = 0$ et $Y(b) = 0$ amène à $\sin(\beta b) = 0$, soit $\beta b = n\pi$, $\beta = n \frac{\pi}{b}$, $n \in \mathbb{N}^*$

d'où $Y(y) = Y_0 \sin\left(n \frac{\pi y}{b}\right)$.

Q.16. On a montré que l'on avait $\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$, soit

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + [(\alpha^2 + \beta^2)c^2] T = 0, \text{ de la forme } \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega_{mn}^2 T = 0.$$

Solution : $T_{mn}(t) = A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t$ avec ω_{mn} les pulsations propres du système :

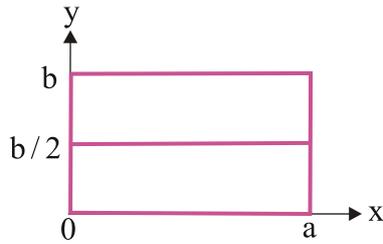
$$\omega_{mn} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} c, \text{ soit } \omega_{mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

Q.17. Représenter les figures de Chladni obtenus pour respectivement :

a. $m=1$ et $n=2$

On a dans ce cas : $X(x) = X_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = 0$ pour $x=0$ et $x=a$

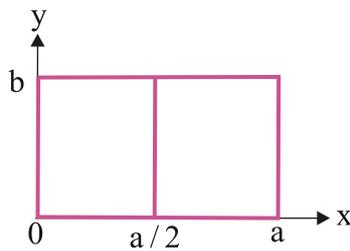
$$Y(y) = Y_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = 0 \text{ pour } y=0, y=b/2 \text{ et } y=b$$



b. $m=2$ et $n=1$

On a dans ce cas : $X(x) = X_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = 0$ pour $x=0$, $x=a/2$ et $x=a$

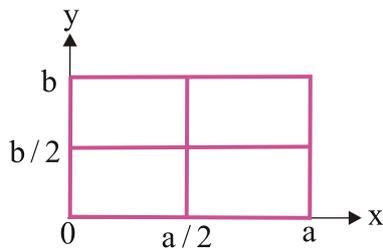
$$Y(y) = Y_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = 0 \text{ pour } y=0 \text{ et } y=b$$



c. $m=n=2$

On a dans ce cas : $X(x) = X_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = 0$ pour $x=0$, $x=a/2$ et $x=a$

$$Y(y) = Y_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = 0 \text{ pour } y=0, y=b/2 \text{ et } y=b$$



C – Filtre répartiteurs

Q.18. On veut $\left| \frac{1}{1 + ja_1x - a_2x^2 - ja_3x^3} \right|^2 = \frac{1}{1+x^6}$, soit encore en notant \underline{D} le dénominateur :

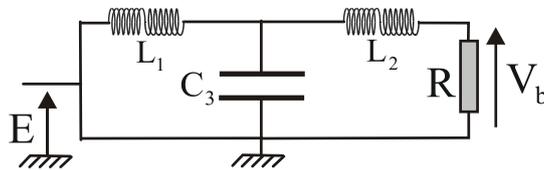
$$D^2 = \left[(1 - a_2x^2) + jx(a_1 - a_3x^2) \right] \left[(1 - a_2x^2) - jx(a_1 - a_3x^2) \right] = 1 + x^6$$

$$D^2 = (1 - a_2x^2)^2 + x^2(a_1 - a_3x^2)^2 = 1 + (a_1^2 - 2a_2)x^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)x^4 + a_3^2x^6 = 1 + x^6$$

Il faut donc avoir $a_3=1$ et également $\begin{cases} a_1^2 - 2a_2 = 0 \\ a_2^2 - 2a_1a_3 = a_2^2 - 2a_1 = 0 \end{cases}$, soit $a_1 = \frac{a_2^2}{2}$

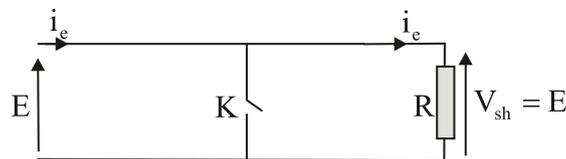
d'où $\frac{1}{4}a_2^4 - 2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2(a_2^3 - 8) = 0$, soit $a_2 = 2$ et donc $a_1 = 2$.

Résumé : $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$



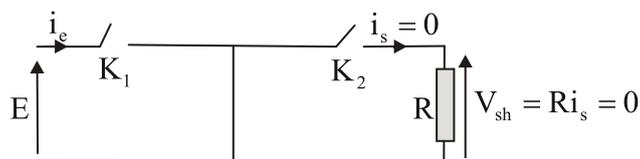
Q.19. En BF, les bobines équivalent à des interrupteurs fermés et on a directement $V_{sb} = E$ avec la loi des mailles.

Schéma équivalent :



En HF, les bobines ne laissent pas passer le courant, on a donc un courant nul dans la résistance R et $V_{sb} = 0$.

Schéma équivalent :



On peut donc supposer un comportement passe-bas, compatible avec la fonction de transfert donnée.

Il s'agit d'un filtre passe-bas du troisième ordre (plus haut degré en ω au dénominateur).

Q.20. La fonction de transfert est de la forme $H_b(jx) = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, soit

$$\omega_0^3 = \frac{R}{L_1 L_2 C_3}, \quad \omega_0^2 = \frac{2}{L_1 C_3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2R}{L_1 + L_2}$$

On en déduit : $\omega_0^3 = \frac{R}{L_1 L_2 C_3} = \frac{2\omega_0}{L_1 C_3}$, soit $L_2 = \frac{R}{2\omega_0}$.

$$L_1 + L_2 = L_1 + \frac{R}{2\omega_0} = \frac{2R}{\omega_0} , \text{ soit } L_1 = \frac{3R}{2\omega_0}$$

Par conséquent, $C_3 = \frac{R}{L_1 L_2 \omega_0^3} = \frac{R}{\omega_0^3} \times \frac{2\omega_0}{3R} \times \frac{2\omega_0}{R} = \frac{4}{3R\omega_0}$: $C_3 = \frac{4}{3R\omega_0}$

Q.21. On veut cette fois un comportement passe-haut (afin de garder les aigus et de filtrer le reste), le même type d'analyse qu'en Q19 conduit bien à prévoir ce comportement.

Une démarche possible est de calculer l'impédance équivalente à $L_3 // (R + C_2)$, puis d'utiliser le pont diviseur de tension avec cette impédance et C_1 .

D – Equation de propagation des ondes acoustiques

Q.22. L'approximation acoustique consiste à étudier des ordres de faible amplitude, c'est-à-dire à avoir : $|p_1| \ll p_0$, $|\mu_1| \ll \mu_0$, $|v_1| \ll c$ et $\xi_m \ll \lambda$, et à mener les calculs au premier ordre en négligeant l'influence de la pesanteur.

Q.23. Les forces s'exerçant sur la particule de fluide sont :

⇒ le poids élémentaire $d\vec{P} = \mu \vec{g} d\tau$

⇒ la force de pression élémentaire $d\vec{F}_p = -\vec{\text{grad}} P d\tau$

On a $\mu d\tau \vec{a} = \mu \vec{g} d\tau - \vec{\text{grad}} P d\tau$, soit en négligeant le poids : $\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\vec{\text{grad}} P$

$\vec{v} = \vec{v}_1 =$ infinitésimal du premier ordre

$(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} =$ infinitésimal du deuxième ordre

Dans l'approximation acoustique, on écrira donc :

$$(\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \ll \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}(P_0 + P_1) = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \vec{e}_x$$

$\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_x$, soit $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$.

Q.24. L'équation locale de conservation de la masse est $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$, soit

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \text{div}[(\mu_0 + \mu_1) \vec{v}_1] = 0.$$

En négligeant le terme $\mu_1 \vec{v}_1$, infinitésimal du second ordre : $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$.

$$Q.25. \chi_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s \approx \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu_0 + \mu_1 - \mu_0}{P_0 + P_1 - P_0} \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{P_1} : \chi_s \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{P_1}$$

$$Q.26. \text{ On a } \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \chi_s = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{P_1}.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} \quad \text{avec } \mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1, \quad \text{la relation devient :}$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu_0 \chi_s P_1) = \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}.$$

$$\text{On a donc l'équation de propagation : } \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

Il s'agit d'une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, d'où l'expression de la célérité c

de l'onde sonore : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$. L'application numérique donne environ 340 m/s.

E – Effet de l'onde sonore sur le haut-parleur

Q.27. L'onde se propageant dans le sens des x croissants, on a $\xi(x, t) = \xi_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$.

L'équation de propagation $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$ donne la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$, soit

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x + \varphi\right).$$

Q.28. On part de la relation liant la vitesse à la surpression, soit $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$.

En notation complexe : $\underline{v}_1 = v_m e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$ et $\underline{P}_1 = P_m e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$, soit $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \mu_0 (j\omega v_1) = -\underline{P}_1 (-jk) = jk \underline{P}_1$

d'où $\underline{Z} = \frac{P_1}{v_1} = \frac{\mu_0 \omega}{k}$, soit avec $k = \frac{\omega}{c}$: $\underline{Z} = \mu_0 c = Z$

L'application numérique donne environ $Z = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

Q.29. La résultante des forces de pression s'exerçant sur la membrane est

$$\vec{F}_p = [P_0 - (P_0 + P_1)] S \vec{e}_x = -P_1 S \vec{e}_x, \quad \text{d'où la puissance de cette force :}$$

$$\mathcal{P} = \vec{F}_p \cdot \vec{v}_1 = (-P_1 S \vec{e}_x) \cdot (v_1 \vec{e}_x) = -P_1 S v_1 = -\mu_0 c S v_1^2 = -\mu_0 c S v^2$$

Cette puissance peut s'écrire comme le produit d'une force de frottement et de la vitesse :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = (-\mu_0 c S \vec{v}) \cdot \vec{v}, \text{ d'où par identification } \vec{F}_f = -\mu_0 c S \vec{v} = -\alpha \vec{v}.$$

F – Intensité acoustique et densité volumique d'énergie sonore

Q.30. Par définition, l'intensité acoustique est la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting acoustique : $I = \langle \Pi \rangle$.

Q.31. On définit l'intensité acoustique par la relation $I_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{\text{ref}}} \right)$ car **l'oreille humaine est un détecteur logarithmique**.

Q.32. Valeur moyenne du vecteur de Poynting : $\langle \Pi \rangle = I = I_{\text{ref}} \cdot 10^{\text{dB}/10}$, d'où numériquement $\langle \Pi \rangle = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Amplitudes de la vitesse et de la surpression : $\langle \Pi \rangle = \langle p_1 v_1 \rangle = \frac{1}{2} p_m v_m$ pour des grandeurs sinusoïdales et en phase, et comme $p_m = Z v_m$ on en déduit $v_m = (2 \langle \Pi \rangle / Z)^{1/2}$, donc avec $Z = 400$ on obtient numériquement $v_m = 0,07 \text{ m/s}$ et $p_m = 28 \text{ Pa}$.

Validité de l'approximation acoustique : les conditions $|p_1| \ll P_0$ et $|v_1| \ll c$ sont bien vérifiées.

En régime sinusoïdal, $v_m = \omega x_m$, on obtient $x_m = 10 \text{ } \mu\text{m}$.

Q.33. On a $\text{div}(\vec{\Pi}_1) = \text{div}(P_1 \vec{v}_1) = P_1 \text{div} \vec{v}_1 + \overrightarrow{\text{grad}} P_1 \cdot \vec{v}_1$

Or on a les équations $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P_1$, soit $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$,

$$\text{et } \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \text{ avec } \mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$$

A une dimension, $\text{div} \vec{\Pi}_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = P_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial P_1}{\partial x}$, soit

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = P_1 \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) + v_1 \left(-\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \right), \quad \mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = - \left[P_1 \frac{\partial}{\partial t} (\chi_s P_1) + \mu_0 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s P_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right)$$

Q.34. La relation précédente traduit donc la relation locale de conservation de l'énergie, soit $e = \frac{1}{2}\chi_s P_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$. Or pour une masse $dm = \mu_0 d\tau$, l'énergie cinétique élémentaire de l'onde acoustique est $dE_c = \frac{1}{2}dmv_1^2 = \left(\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2\right)d\tau$, soit $e_c = \frac{dE_c}{d\tau} = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$.

La grandeur $e_c = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$ représente donc **l'énergie cinétique volumique** transportée par l'onde sonore. Par conséquent, avec $e = e_p + e_c$, la grandeur $e_p = \frac{1}{2}\chi_s P_1^2$ représente **l'énergie potentielle volumique** de l'onde sonore.

PARTIE CHIMIE

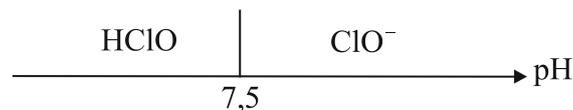
Dosage d'un produit bactéricide

A – Diagramme potentiel – pH

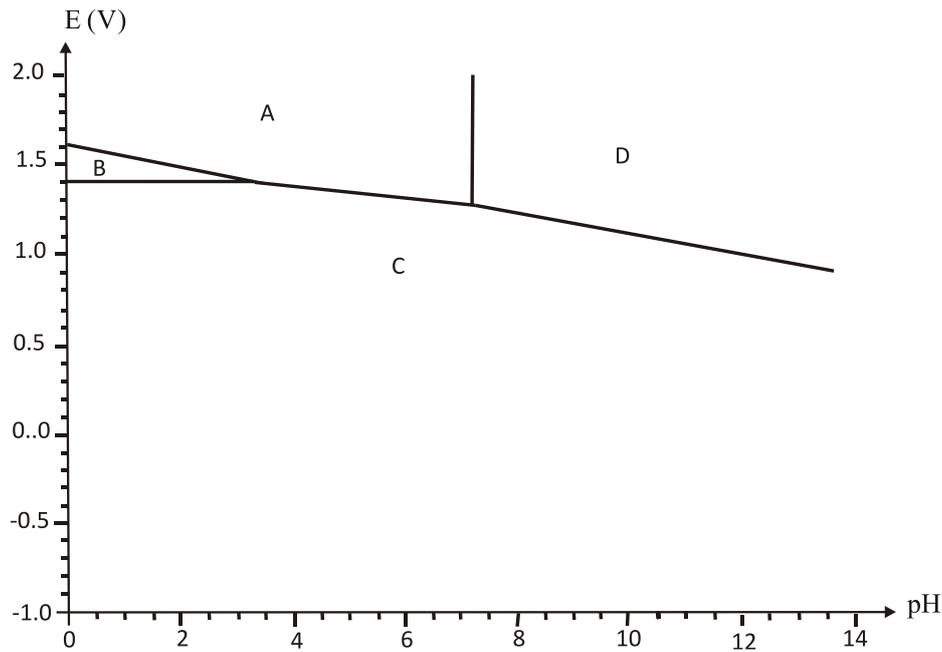
Q.35. n.o.(Cl₂)=0 ; n.o.(ClO⁻)=I ; n.o.(Cl⁻)=-I

Q.36. Dans la réaction, on passe pour le chlore d'un n.o. de 0 aux nombres d'oxydation I et -I. Il s'agit donc d'une réaction de dismutation.

Q.37. Diagramme de prédominance des espèces HClO/ClO⁻



Q.38. Plus on va vers les potentiels croissants, plus le n.o. de l'élément est élevé. On identifie donc : A=HClO , B=Cl₂ , C=Cl⁻ et D=ClO⁻.



Q.39. Couple HClO/Cl₂

Pour $\text{pH} \leq 3,5$, on a $\text{HClO} + e + \text{H}_{\text{aq}}^+ = \frac{1}{2} \text{Cl}_{2(\text{aq})} + \text{H}_2\text{O}$

Loi de Nernst : $E_1 = E_{(\text{HClO}/\text{Cl}_2)}^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{HClO}]h}{[\text{Cl}_2]^{1/2}} \right)$ avec $h = [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{H}_{\text{aq}}^+]$

D'après la convention frontière : $2[\text{Cl}_2] = [\text{HClO}]$ et $c_0 = 2[\text{Cl}_2] + [\text{HClO}]$, soit $[\text{HClO}] = c_0/2$ et $[\text{Cl}_2] = c_0/4$, d'où $E_1 = 1,60 + 0,06 \log(\sqrt{c_0}h) = 1,57 - 0,06\text{pH}$.

Q.40. Première méthode : on utilise la formule de Nernst et le diagramme :

Pour $\text{pH} \in [3,5; 7,5]$: $\text{HClO} + 2e + \text{H}_{\text{aq}}^+ = \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$, ce qui conduit à $E = E^0 - 0,03 \text{pH}$ et on obtient E^0 en prolongeant la frontière entre A et C.

Deuxième méthode : à partir des formules de Nernst ou des enthalpies de $\frac{1}{2}$ réaction, on obtient

$$2E_{(\text{HClO}/\text{Cl}^-)}^0 = E_{(\text{HClO}/\text{Cl}_2)}^0 + E_{(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-)}^0, \text{ soit } E_{(\text{HClO}/\text{Cl}^-)}^0 = 1,495 \text{ V}.$$

Q.41. En milieu acide, ClO^- se transforme d'abord en HClO, puis pour $\text{pH} < 3,5$, HClO oxyde Cl^- en Cl_2 selon la réaction d'amphotérisation : $\text{HClO} + \text{Cl}^- + \text{H}_{\text{aq}}^+ = \text{Cl}_{2(\text{g})} + \text{H}_2\text{O}$.

Le danger vient de la libération du dichlore, qui est un gaz toxique.

B – Dosage par la méthode de Pontius

Q.42. Le degré chlorométrique $d = 36^\circ$ correspond à 36 L de dichlore dégagé dans 1 L de solution, soit 9 L de Cl_2 dégagé dans un berlingot de 250 mL.

Ainsi, $V_{\text{Cl}_2} = 9\text{L} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ et donc $n_{\text{Cl}_2, \text{dégagé}}^{\text{berlingot}} = \frac{PV_{\text{Cl}_2}}{RT} = 0,4 \text{ mole}$.

Q.43. $\text{NaHCO}_3 \rightarrow \text{Na}^+ + \text{HCO}_3^-$

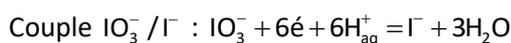
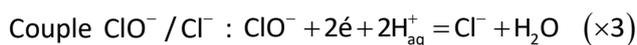
L'espèce HCO_3^- est une espèce amphotère qui intervient dans les couples acido-basiques $\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-$ et $\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}$. La réaction prépondérante est : $2\text{HCO}_3^- = \text{H}_2\text{CO}_3 + \text{CO}_3^{2-}$;

$$K = \frac{[\text{H}_2\text{CO}_3][\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{HCO}_3^-]^2}$$

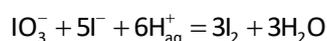
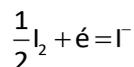
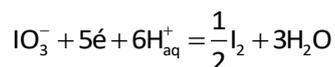
On a $[\text{H}_2\text{CO}_3] = [\text{CO}_3^{2-}]$. D'autre part, $\text{pH} = \text{pK}_{A1} + \log\left(\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}\right) = \text{pK}_{A2} + \log\left(\frac{[\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{HCO}_3^-]}\right)$, on a donc

$$2\text{pH} = \text{pK}_{A1} + \text{pK}_{A2} + \log\left(\frac{[\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}\right) = \text{pK}_{A1} + \text{pK}_{A2}, \text{ d'où } \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_{A1} + \text{pK}_{A2}) = 8,35.$$

Q.44. D'après les diagrammes E-pH, l'ion ClO^- va oxyder I^- en IO_3^- et être réduit en ion Cl^- , l'espèce IO_3^- pouvant être en équilibre avec ClO^- .



Q.45. A priori, on est trop loin du domaine de stabilité de I_2 (qui s'arrête à $\text{pH} \approx 7,5$ environ), cependant la présence d'empois d'amidon qui réagit avec le diiode peut déplacer l'équilibre en faveur du diiode.



Q.46. Calcul du volume équivalent

On a vu à la question 11 que pour la solution préparée (S_0) de berlingot, il allait être dégagé $n_{\text{Cl}_2} = 0,4$ mole de dichlore. On a formé en tout 1L de solution, et on en prélève 10 mL. Dans les 10

mL prélevée, il peut donc se libérer $n'_{\text{Cl}_2} = 0,4 \times \frac{10}{1000} = 4 \cdot 10^{-3}$ mole de dichlore

On raisonne sur les réactions : $\text{ClO}^-_{\text{aq}} + \text{Cl}^-_{\text{aq}} + 2\text{H}^+_{\text{aq}} = \text{Cl}_{2(\text{g})} + \text{H}_2\text{O}$
 $3\text{ClO}^- + \text{I}^- = 3\text{Cl}^- + \text{IO}_3^-$

D'après ces réactions, on a $(n_{\text{ClO}^-})_0 = (n_{\text{Cl}_2})_{\text{dégagé}} = 4 \cdot 10^{-3}$ mole ,

et $(n_{\text{I}^-})_{\text{versé à l'équivalence}} = \frac{1}{3}(n_{\text{ClO}^-})_0 = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3}$ mole = $[\text{I}^-] v_{\text{eq}(\text{I}^-)}$

Sachant que $[\text{I}^-] = C' = 5 \cdot 10^{-2}$ mol.L⁻¹, on en déduit : $v_{\text{eq}(\text{I}^-)} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{3 \times 5 \cdot 10^{-2}} = \frac{0,4}{15} = 2,66 \cdot 10^{-2}$ L = 26,6 mL

FIN