ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ... , n, ...
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ... , n.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.
5. Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k.
7. Déterminer la loi de X.
8. Vérifier **par le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 2

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étude de la convergence de la série de terme général u_n

1.1. Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

1.2. Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

1.3. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. Calcul de la somme de cette série

2.1. Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

2.2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

2.3. Intégration terme à terme ?

2.3.1. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

2.3.2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2.3.3. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j \right) \quad \text{et} \quad (g = f - \mathrm{id}_{E_n}).$$

1. Donner, dans la base $\mathscr{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.

2. Justifier que f et g sont diagonalisables.

3. Diagonalisation de f et de g dans une même base

3.1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.2. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. Méthode 1

(i) Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par g.

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\mathrm{Im}(g)$ induit par g.

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2.

3.4.2. Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathscr{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

3.5. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}\, G\, P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, .., 0)$. *On ne demande pas de déterminer* P^{-1}.

3.6. Justifier que la matrice $P^{-1}\, F\, P$ est diagonale.

4. Résoudre, pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = F\, X(t) + t\, U$ où U est la première colonne de la matrice P.

EXERCICE 4

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-x\,t}\, \mathrm{d}t$.

1. Continuité de f

1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

1.3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. Montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

2.1.2. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t}\, \mathrm{e}^{-x t} \leqslant t\, \mathrm{e}^{-a t}$.

2.1.3. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t)\, \mathrm{e}^{-x t} \leqslant \mathrm{e}^{-a t}$.

2.2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

3.1. Montrer que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, x > 0,\ \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t}\right| = \mathrm{e}^{-x t}$.

3.2. En déduire que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \lim\limits_{t\to+\infty} \left| \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t} \right| = 0$.

3.3. Démontrer alors que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(x^2+4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2\,\mathrm{i}}$.

4. Une autre expression de f

4.1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4.2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

4.3. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(t) = t\ln\left(t^2+4\right) - 2t + 4\arctan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

4.4. Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

FIN