

# Problème 1 – Étude d'un diapason

## I – Étude de la réponse percussive

1. **Force de frottement fluide**, exercée par le fluide au contact des branches du diapason. La puissance transférée par frottement fluide des branches du diapason vers l'air qui les entoure permet de **modéliser l'émission d'un son**. Elle est **dissipative** du point de vue du diapason pour  $\lambda > 0$  (car la puissance de la force  $\vec{f}$  est alors  $-\lambda v^2 \leq 0$ ).

2. TRD à la masselotte dans le ref du labo supposé galiléen :  $m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0$ .

3.  $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$  par identification avec la forme canonique  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ , il vient

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$$

4. Puisqu'il y a des pseudo-oscillations,  $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$ . Alors les racines  $r_{\pm}$  de l'équation caractéristiques sont  $r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm i\Omega$  avec  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ ,  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  et

$$z(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\Omega t + \phi) = A \exp\left(-\frac{\lambda t}{2m}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4mk}} t + \phi\right)$$

où  $A$  et  $\phi$  sont deux constantes d'intégration.

5.  $k = 4\pi^2 f_0^2 m \simeq 4 \times 10 \times 5^2 \cdot 10^2 \times 3 \cdot 10^{-2}$ , soit  $k \simeq 3 \cdot 10^3$  N/m. Pour les ressorts utilisés en TP, on constate typiquement un étirement à l'équilibre  $\Delta \ell \simeq 10$  cm si on suspend une masselotte de masse  $\simeq 10^{-1}$  kg d'où

$$k_{\text{TP}} \simeq \frac{mg}{\Delta \ell} = \frac{10^{-1} \times 10}{10^{-1}} = 10 \text{ N/m}$$

Le ressort équivalent pour le diapason est nettement plus raide que celui d'un ressort de TP.

6. Pour le diapason,  $\tau \simeq 10$  s donc  $Q \simeq \tau \omega_0 = 10 \times 2\pi \times 5 \cdot 10^2 \simeq 3 \cdot 10^4$ . Pour un oscillateur masse-ressort de TP, on compte typiquement une dizaine de pseudo-oscillations soit  $Q \simeq 10$ . Le **facteur de qualité du diapason est bien supérieur** à celui de l'oscillateur masse-ressort de TP.

7. La durée entre les deux passages est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

en notant  $T_0$  la période propre. En **toute rigueur**, l'affirmation est **inexacte puisque  $T \neq T_0$** .

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right) \quad (\text{pour } Q \gg 1)$$

Toutefois, l'approximation peut être **acceptable selon la précision requise** : pour  $Q \simeq 10$ , l'écart relatif entre  $T$  et  $T_0$  est de l'ordre de 0,1%.

8. Pareil, en toute rigueur,  $T \neq T_0$ ; mais cette fois  $Q \simeq 10^4$  donc l'approximation est bien meilleure que pour l'oscillateur masse-ressort de TP.

9. La deuxième figure donne  $f_0 = \frac{11}{25 \cdot 10^{-3}} = \left(\frac{10}{25} + \frac{1}{25}\right) \times 10^3 = 4,4 \cdot 10^2$  Hz. La première figure donne  $\tau$  entre 1,5 et 2,0 s selon la méthode utilisée (**tangente à l'origine** ou **0,37 × la valeur initiale**), d'où  $Q = \pi f_0 \tau = 3 \times 4 \cdot 10^2 \times 2 = 2 \cdot 10^3$ . La valeur de la **fréquence correspond bien** à l'estimation précédente, mais le **facteur de qualité est plus faible**. On peut penser que l'**estimation à l'oreille** était très **grossière**. On peut aussi penser que l'**ajout de la cavité fait baisser Q** : en présence de la caisse de résonance, l'émission sonore est plus importante donc l'atténuation plus rapide.

## II – Génération du champ excitateur

10. Plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie pour la distribution de courant donc  $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_z$ . Invariance de la distribution de courant par toute modification de  $\theta$  et  $z$  donc  $B(r)$ .

11. Utiliser le théorème d'Ampère sur un rectangle inclus dans le solénoïde dont deux côtés sont parallèles à  $Oz$  (démo du cours). Puis prendre un rectangle similaire à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde pour aboutir à  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$ .

12.  $B \simeq 10^{-6} \times 10^3 \times 0,1 = 0,1$  mT ce qui est **proche de la valeur du champ magnétique terrestre au sol**.

13. On **néglige les effets de bord**, ce qui permet d'exploiter l'**invariance par toute modification de  $z$**  et de traiter  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  comme un **plan de symétrie** quelle que soit la position du point  $M$  (cf question 10). Cela permet finalement de tirer profit du théorème d'Ampère. Cette approximation est **valide en des points  $M$  distants des « faces d'entrée » et de « sortie »** (ouvertures perpendiculaires à l'axe  $Oz$ ) du solénoïde **de plus qu'environ une fois le rayon** du solénoïde.

14. Maxwell-Thomson (ou Maxwell-« flux ») :  $\text{div} \vec{B} = 0$ ;

Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$  ( $\rho(M, t)$  densité volumique de charge);

Maxwell-Faraday :  $\text{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ ;

Maxwell-Ampère :  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$  ( $\vec{j}(M, t)$  densité de courant volumique).

15. D'après MF,  $\partial_t \vec{B}$  joue le même rôle pour  $\vec{E}$  que  $\vec{j}$  pour  $\vec{B}$  dans MA. Comme le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie pour  $\vec{B}$  alors  $\vec{E}(M, t)$  est normal à ce plan, donc

$$\vec{E}(M, t) = E(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$$

On a encore **invariance** de  $B(r, t)$  **par toute modification de  $\theta$  et  $z$**  donc  $E(r, t)$ .

16. Appliquons la formule de Stokes à MF (ou directement la loi de Faraday) en prenant comme contour le cercle passant par  $M$  (situé à l'intérieur du solénoïde), orthogonal à l'axe  $Oz$  orienté de sorte que son vecteur surface soit selon  $+\vec{u}_z$ . Il vient :

$$2\pi r E(r, t) = \pi r^2 \mu_0 n \omega I \sin \omega t \quad \text{d'où} \quad \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \frac{r}{2} \mu_0 n \omega \mathbf{I} = \mathbf{B}_0 \omega \frac{r}{2}$$

### III – Interaction entre le champ exciteur et une branche du diapason

17. Matériau à l'intérieur duquel le **champ électrique est nul à toute fréquence**. Autre alternative : c'est un **milieu ohmique à la limite  $\gamma \rightarrow \infty$** .

18. En un point M de l'interface, la relation de passage s'écrit :

$$\vec{E}_{\text{vide}}(\text{M}, t) = -\frac{\sigma(\text{M}, t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

donc  $\vec{u}_\theta \cdot \vec{E}_{\text{vide}}(\text{M}, t) = 0$  pour tout  $t$ . Si seul  $\vec{E}_i$  était présent, alors pour tout  $t$ ,  $\frac{E_0(r)}{2} \sin \omega t = 0$ , ce qui imposerait  $E_0(r) = 0$  (donc partout dans le domaine vide, puisque  $E_0$  est indépendant de  $z$ ). L'existence d'un champ  $\vec{E}_i \neq \vec{0}$  requiert l'existence d'un champ réfléchi.

19. En un point M de l'interface vide-conducteur parfait,

$$\vec{0} - [\vec{E}_r(\text{M}, t) + \vec{E}_i(\text{M}, t)] = \frac{\sigma(\text{M}, t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

Pour un champ électrique incident  $\vec{E}_i$  tangentiel à l'interface, le champ réfléchi  $\vec{E}_r$  est également tangentiel à l'interface, d'où  $\sigma(\text{M}, t) = 0$  et

$$\vec{E}_r = -\frac{\mathbf{E}_0(r)}{2} \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

D'après MF,  $\frac{1}{2} \left( E'_0(r) + \frac{E_0(r)}{r} \right) \sin \omega t \vec{u}_z = \frac{B_0}{2} \omega \sin \omega t \vec{u}_z = \partial_t \vec{B}_r$  d'où

$$\vec{B}_r(\text{M}, t) = \vec{B}_i(\text{M}, t)$$

où l'on a pris la constante d'intégration nulle en l'absence de source de champ magnétostatique. Si bien qu'en tout point M dans l'air au voisinage de l'axe Oz,

$$\vec{E}(\text{M}, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}(\text{M}, t) = \mathbf{B}_0 \cos \omega t \vec{u}_z$$

20. Remarquons que  $|z|/R \simeq R/L \simeq 10^{-1}$  et  $|z|/L \simeq 10^{-2}$ . On réécrit  $b(z)$  sous la forme

$$b(z) = B_0 \left[ \frac{1 + z/L}{\sqrt{(1 + z/L)^2 + (R/L)^2}} - \frac{z/R}{\sqrt{1 + (z/R)^2}} \right]$$

soit  $b(z) = B_0 \left[ (1 + o(10^{-1})) [1 + o(10^{-1})] - \frac{z}{R} [1 + o(10^{-1})] \right]$

À l'ordre 1 en  $z/R$  et  $R/L \simeq 10^{-1}$ ,  $b(z) \simeq B_0 \left[ 1 - \frac{z}{R} \right] \vec{u}_z$  d'où  $\mathbf{a} = -1$ .

En se limitant à l'ordre 0 en  $R/L$  et  $z/R$ ,  $b(z) = B_0$ . **L'expression proposée en début de partie III est une forme approchée de  $b(z)$  à l'ordre 0.**

21. Avec  $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{\mu}$ ,

$$d\vec{F}_m = \chi B_0^2 \left( 1 + a \frac{z}{R} \right) \frac{a}{R} \cos^2 \omega t \vec{u}_z dV \simeq \chi B_0^2 \frac{a}{R} \cos^2 \omega t \vec{u}_z$$

d'où  $\alpha = -\chi B_0^2 \frac{a}{R} = \frac{\chi B_0^2}{R}$

La force est dirigée vers  $-\vec{u}_z$ , c'est-à-dire dans le sens  $b(z)$  croissant (donc vers la zone de champ fort).

22. Comme  $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$ , le **forçage est à la pulsation  $2\omega$** . Il faut donc exciter près de la fréquence **128 Hz** pour étudier la résonance d'un diapason qui résonne à 256 Hz.

### IV – Fabrication de la source de courant et résultats expérimentaux

23.  $\tau u'(t) + u(t) = E$  d'où  $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ . Le tube s'allume si  $E > U_a$ , alors il existe un instant  $t_a$  tel que  $t_a = -\tau \ln \left( 1 - \frac{U_a}{E} \right)$ .

24. Pendant toute la durée où le tube est allumé,  $\tau u'(t) + \left( 1 + \frac{R}{r} \right) u(t) = E$  d'où, par continuité de la tension aux bornes du condensateur en  $t = t_a$ ,

$$u(t) = \mathbf{E}' + (U_a - \mathbf{E}') e^{-(t-t_a)/\tau'}$$

25. Pendant la phase d'allumage,  $u$  est décroissante. Le tube s'éteint si

$$E' < U_e$$

alors il existe un instant  $t_e$  tel que  $t_e = t_a + \tau' \ln \left( \frac{U_a - E'}{U_e - E'} \right)$ .

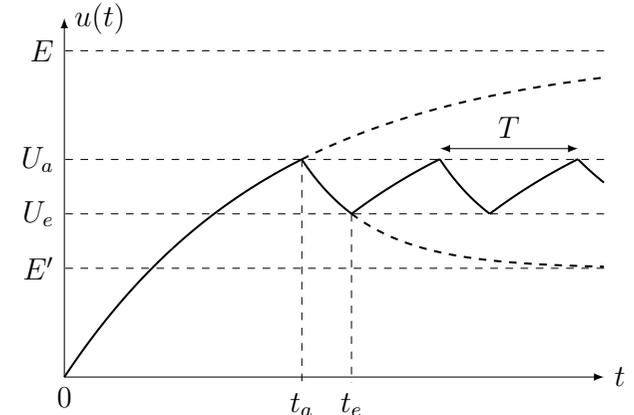
26. Pour  $t > t_e$ , on retrouve  $\tau u'(t) + u(t) = E$  et  $u(t) = E + (U_e - E)e^{-(t-t_e)/\tau}$  pour  $t > t_e$  tant que le tube est éteint. L'allumage se produit de nouveau pour  $t = t'_a$  tel que

$$t'_a = t_e + \tau \ln \left( \frac{E - U_e}{E - U_a} \right)$$

La période de l'oscillateur est donc

$$T = t'_a - t_a = \tau \ln \left( \frac{E - U_e}{E - U_a} \right) + \tau' \ln \left( \frac{U_a - E'}{U_e - E'} \right)$$

27. On obtient le graphe suivant :

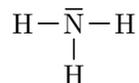


28. On trouve une fréquence propre de  $f_0 = 219,94 \times 2 = 439,9 \text{ Hz}$ . Pour le facteur de qualité,  $Q = \frac{220}{219,983 - 219,895} = \frac{220}{0,09} = 2,4 \cdot 10^3$  (en prenant les fréquences pour lesquelles  $U_{\max} = 700 \text{ mV}$  est divisé par  $\sqrt{2}$  soit  $500 \text{ mV}$ ). On retrouve les valeurs de la question 9.

29. Les harmoniques du spectre de  $u(t)$  sont espacées de  $f_0$ . Puisque le facteur de qualité du diapason est voisin de  $10^3$ , les harmoniques  $f_n \geq 2f_0$  sont nettement en dehors de la résonance du diapason et n'excite pas ses oscillations. Leur présence ne fausse pas les mesures.

## Problème 2 – Synthèse de l'ammoniac

30. Schéma de Lewis de l'ammoniac :



31. Fe :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$ .

32.  $\text{Fe}^{2+}$  :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^6$  ;  $\text{Fe}^{3+}$  :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^5$ .  $\text{Fe}^{3+}$  plus stable d'après la règle de Hundt.

33. Population : 2 d'où  $\rho = \frac{2 \text{ M(Fe)}}{a^3 \text{ N}_A} = \frac{0,11}{6 \cdot 10^{23} \times (3 \cdot 10^{-10})^3} = 6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

34.  $\Delta_r H^\circ < 0$  donc réaction exothermique dans le sens direct.  $\Delta_r S^\circ < 0$  en accord avec  $\Delta \nu_{\text{gaz}} = -2 < 0$  ce qui traduit que la réaction crée de l'ordre dans le mélange réactionnel.

35. Comme  $\Delta_r G_1^\circ = -RT \ln K_1$  et  $\Delta_r G_1^\circ = \Delta_r H_1^\circ - T \Delta_r S_1^\circ$ , il vient  $K_1 = \exp\left(\frac{\Delta_r S_1^\circ}{R} - \frac{\Delta_r H_1^\circ}{RT}\right)$ .

36.  $v = 2 + 3 - 2 = 3$ .

37. À l'équilibre,  $K_1 = \frac{(p^\circ)^2 p_{\text{NH}_3}^2}{p_{\text{N}_2} p_{\text{H}_2}^3} = \frac{(p^\circ)^2 n_{\text{NH}_3}^2 n_t^2}{P^2 n_{\text{N}_2} n_{\text{H}_2}^3}$

Notons  $n$  la quantité de matière initiale de diazote. On construit le tableau d'avancement en quantité de matière :

	$3 \text{ H}_2(\text{g})$	$+ \text{ N}_2(\text{g})$	$= 2 \text{ NH}_3(\text{g})$
état initial	$3n$	$n$	$0$
état d'équilibre	$3(n - \xi)$	$n - \xi$	$2\xi$

Avec  $r = \xi/n$ , il vient :  $n_{\text{NH}_3} = 2r n$ ,  $n_{\text{N}_2} = n(1 - r)$ ,  $n_{\text{H}_2} = 3n(1 - r)$ ,  $n_t = 2n(2 - r)$ , d'où

$$K_1 = \frac{16 (p^\circ)^2 r^2 (2 - r)^2}{27 P^2 (1 - r)^4}$$

On dispose bien de 3 paramètres : T, P et r. Le choix de la valeur de 2 d'entre eux, fixe le troisième.

38. D'après le calcul de la question 37, lorsque P augmente, Q donc la réaction est favorisée dans le sens direct. Le rendement augmente. Il semble naturel de se placer à haute pression d'où le choix de 300 bars.

39. La réaction est exothermique dans le sens direct, augmenter modérément la température conduit à un déplacement de l'équilibre dans le sens indirect, c'est-à-dire à une diminution du rendement.

40. D'après la question précédente,  $25^\circ\text{C} < 450^\circ\text{C}$  aurait été mieux du point de vue du rendement et moins coûteux énergétiquement. C'est probablement pour une raison cinétique : la réaction est trop lente à  $25^\circ\text{C}$ . Les industriels utilisent le fer comme catalyseur (qui accélère la réaction sans en modifier le rendement). 'On peut penser qu'à  $450^\circ\text{C}$  la réaction est bien plus rapide en présence de fer comme catalyseur qu'à  $25^\circ\text{C}$ .