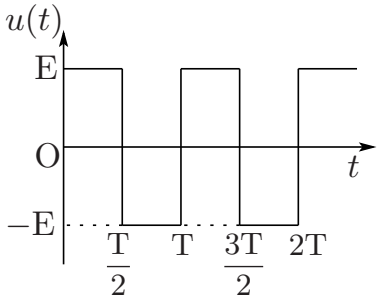
PSI Physique-chimie 2022 : corrigé

Partie I - Chauffage des poêles par induction

I.1 - Onduleur RLC série

Q1. Un onduleur permet de **convertir une tension continue en tension alternative**. La présence de la bobine impose la continuité de l'intensité traversant la charge RLC série : cette charge est donc une **source de courant**.

Q2. Pour $nT < t < (n+1/2)T$, la loi des mailles donne $u(t) = E$. Pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$, on a $u(t) = -E$:



Q3. La tension aux bornes de la charge RLC s'écrit

$$u = u_L + u_C + u_R = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C + Ri$$

avec $i = C\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$. En dérivant cette relation puis en la divisant par L, il vient

$$\boxed{\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i}$$

Par identification avec l'énoncé, on obtient

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Q4. $\underline{H}$ est homogène à l'**inverse d'une résistance** (ou conductance) et s'exprime en Ω^{-1}. Passons l'équation différentielle précédente en notation complexe :

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{L}\underline{u} = \left[(\mathrm{j}\omega)^2 + \frac{\mathrm{j}\omega\,\omega_0}{Q} + {\omega_0}^2\right]\underline{i}$$

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1/(L\omega_0)}{\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0} + \frac{1}{Q} + \frac{\omega_0}{\mathrm{j}\omega}}$$

Avec $R/L = \omega_0/Q$, il vient

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1/R}{1 + \mathrm{j}Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}}$$

— Aux petites pulsations, $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) \sim \frac{\mathrm{j}\omega}{RQ\omega_0}$ d'où

$$\boxed{G(\omega) \sim \frac{\omega}{RQ\omega_0}}$$

— Aux grandes pulsations, $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) \sim \frac{\omega_0}{\mathrm{j}\omega RQ}$ d'où

$$\boxed{G(\omega) \sim \frac{\omega_0}{RQ\omega}}$$

Q5. D'après la question précédente,

$$G(\omega) = \frac{1/R}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}$$

$G(\omega)$ est maximal lorsque la quantité $Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2$ est minimale, soit lorsque $\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = 0$, d'où $\omega = \omega_0$. Il vient

$$\boxed{G_{\max} = \frac{1}{R} = 1{,}4 \cdot 10^{-1}\ \Omega^{-1}}$$

Q6. Les questions 4 et 5 illustrent un filtrage de type **passe-bande d'ordre 2**. Maximiser la puissance de chauffage revient à maximiser l'amplitude du champ magnétique créé par la bobine, soit aussi l'amplitude du courant qui la traverse. On a vu que $G(\omega) = |\underline{i}/\underline{u}|$ est maximal en $\boxed{\omega = \omega_0}$, d'où la condition de l'énoncé. La fréquence associée vérifie $\omega_0 = 2\pi f$, soit

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 39\ \mathrm{kHz}}$$

I.2 - Puissance induite dans la poêle

Q7. L'équation locale de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

En appliquant le théorème de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right)}$$

Q8. On choisit pour contour $\mathcal{L}$ un cercle de rayon r orienté dans le sens direct, et pour surface S le disque de rayon r s'appuyant sur ce cercle. Alors,

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\cdot r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta = 2\pi r E(r,t)$$

et

$$\iint_S \vec{B}\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_z = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,i(t)}{2R}\pi r^2$$

D'après la question précédente,

$$2\pi r E(r,t) = -\frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,\pi r^2}{2R}\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,\pi r^2\,\omega I_0\sin(\omega t)}{2R}$$

Il vient

$$\boxed{E(r,t) = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,r\,\omega I_0\sin(\omega t)}{4R}}$$

Q9. La loi d'Ohm locale donne

$$\boxed{\vec{\jmath} = \gamma\vec{E} = \frac{\gamma\mu_0\mu_\mathrm{r}\,r\,\omega I_0\sin(\omega t)}{4R}\vec{u}_\theta}$$

La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule s'exprime

$$p = \langle \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\rangle = \gamma\langle E^2\rangle$$

où $\langle E^2\rangle$ désigne la moyenne temporelle du carré du champ électrique. Comme $E(r,t)$ varie en $\sin(\omega t)$ et $\langle \sin^2(\omega t)\rangle = 1/2$,

$$\boxed{p = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,r\,\omega I_0}{4R}\right)^2 = \frac{\gamma}{32}\left(\frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,\omega I_0}{R}\right)^2 r^2}$$

Q10. On intègre p sur le volume de la poêle :

$$P_\mathrm{ind} = \iiint_{\text{poêle}} p\,\mathrm{d}V = \frac{\gamma}{32}\left(\frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,\omega I_0}{R}\right)^2 \int_0^a r^2\,r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^e \mathrm{d}z$$

$$P_\mathrm{ind} = \frac{\gamma}{32}\left(\frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\,\omega I_0}{R}\right)^2 \frac{a^4}{4}\,2\pi\,e$$

$$\boxed{P_\mathrm{ind} = \frac{\pi(\mu_0\,\mu_\mathrm{r})^2\gamma\,\omega^2 {I_0}^2\,e a^4}{64\,R^2}}$$

Q11. Bien que meilleur conducteur électrique, l'aluminium ne possède pas les propriétés magnétiques de la fonte ($\mu_{\text{r,fonte}} \gg \mu_{\text{r,Al}} \simeq 1$). La puissance induite variant en ${\mu_\text{r}}^2$, **une poêle en fonte chauffera bien plus efficacement qu'une poêle en aluminium**.

Q12. Le phénomène mis en jeu est l'**effet de peau**. Avec $f = 39$ kHz, on trouve

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi\,\mu_0\mu_\text{r}\,\gamma f}} = 2{,}9 \cdot 10^{-1}\ \text{mm}}$$

L'épaisseur typique d'une poêle, $\underline{e \approx 0{,}5\ \text{mm}}$, est plus grande que δ mais du même ordre : le calcul précédent devrait donner un **ordre de grandeur raisonnable** de la puissance induite.

I.3 - Influence du nombre de spires sur la température de la poêle

Q13. On applique le 1$^\text{e}$ principe de la thermodynamique à une tranche de section S et d'épaisseur $\text{d}x$, au repos macroscopique et à $P = \text{cste}$, entre les instants t et $t + \text{d}t$:

$$\text{d}^2H = \delta^2 Q_\text{ind} + \delta^2 Q_\text{cond}$$

On a

$$\text{d}^2H = \rho c\, S\text{d}x[T(x,t+\text{d}t) - T(x,t)] \simeq \rho c\, S\text{d}x\frac{\partial T}{\partial t}\text{d}t$$

puis

$$\delta^2 Q_\text{ind} = p\, S\text{d}x\,\text{d}t$$

et

$$\delta^2 Q_\text{cond} = j_\text{th}(x,t)S\,\text{d}t - j_\text{th}(x+\text{d}x,t)S\,\text{d}t \simeq -\frac{\partial j_\text{th}}{\partial x}\text{d}x\,S\,\text{d}t$$

Avec la loi de Fourier,

$$\delta^2 Q_\text{cond} \simeq \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\text{d}x\,S\,\text{d}t$$

En rassemblant les termes et en divisant par $\rho c\, S\text{d}x\,\text{d}t$,

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho c} + \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Q14. Par analyse dimensionnelle des termes de l'équation précédente,

$$\frac{[T]}{\tau} \sim \frac{\lambda}{\rho c}\frac{[T]}{\ell^2}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\rho c\,\ell^2}{\lambda}}$$

En prenant pour taille typique le rayon d'une poêle à pancakes $\ell \approx 5$ cm, on obtient $\underline{\tau \approx 3\ \text{min}}$, en accord avec la durée du régime transitoire indiquée dans l'énoncé : « quelques minutes ».

Q15. En utilisant l'équation de la droite d'ajustement,

$$160 = 2{,}18\,N + 41$$

$$\boxed{N = \frac{160 - 41}{2{,}18} = 55\ \text{spires}}$$

Partie II - Déversoir de pâte

II.1 - Modèle parfait

Q16. Pour un écoulement **parfait**, **stationnaire**, **homogène** et **incompressible**, on peut écrire, entre deux points 1 et 2 d'une même ligne de courant,

$$\boxed{P_1 + \frac{\rho {v_1}^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho {v_2}^2}{2} + \rho g z_2}$$

Q17. L'incompressibilité implique la conservation du débit volumique entre les points 1 et 2 :

$$v_1(t)\,\pi {R_1}^2 = v_2(t)\,\pi {R_2}^2$$

$$\boxed{v_1(t) {R_1}^2 = v_2(t) {R_2}^2}$$

Q18. Appliquons la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$P_1 + \frac{\rho {v_1}^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho {v_2}^2}{2} + \rho g z_2$$

Avec $P_1 = P_2 = P_0$, $z_1 = h_\mathrm{p}(t)$ et $z_2 = 0$, cette équation devient

$${v_1}^2(t) + 2 g h_\mathrm{p}(t) = {v_2}^2(t)$$

En injectant le résultat de la question précédente, il vient

$$\boxed{v_2(t) = \sqrt{\frac{2 g h_\mathrm{p}(t)}{1 - (R_2/R_1)^4}}}$$

Q19. La relation de la question 17 se réécrit

$$v_2(t) = -\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{\mathrm{d}h_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$$

On identifie alors les deux expressions de $v_2(t)$ obtenues :

$$\boxed{-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{\mathrm{d}h_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2 g h_\mathrm{p}(t)}{1 - (R_2/R_1)^4}}}$$

Q20. En séparant les variables de l'équation différentielle précédente,

$$\frac{\mathrm{d}h_\mathrm{p}}{\sqrt{h_\mathrm{p}}} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \sqrt{\frac{2g}{1-(R_2/R_1)^4}}\mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{2g}{(R_1/R_2)^4-1}}\mathrm{d}t$$

En intégrant entre l'instant initial $t = 0$ ($h_\mathrm{p} = h_0$) et un instant t quelconque,

$$2\sqrt{h_\mathrm{p}(t)} - 2\sqrt{h_0} = -\sqrt{\frac{2g}{(R_1/R_2)^4-1}}\,t$$

$$\boxed{h_\mathrm{p}(t) = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2[(R_1/R_2)^4-1]}}\,t\right)^2}$$

À la fin de la vidange, $h_\mathrm{p}(\tau_\mathrm{p}) = 0$, soit

$$\boxed{\tau_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1\right]}}$$

Q21. On trouve $\underline{\tau_\mathrm{p} = 2{,}0 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{s} \ll \tau_\mathrm{exp}}$. L'hypothèse d'un écoulement parfait sans viscosité est à revoir.

II.2 - Modèle visqueux

Q22. Dimensionnellement,

$$\boxed{v_\mathrm{m} \sim \frac{h_0}{\tau_\mathrm{exp}} \approx 4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

Le nombre de Reynolds est défini par

$$\boxed{\mathcal{R}e = \frac{\rho v_\mathrm{m} d}{\eta} = \frac{2\,\rho v_\mathrm{m} R_1}{\eta}}$$

On trouve numériquement $\underline{\mathcal{R}e = 0{,}3 \ll 2 \cdot 10^3}$: l'expression de Λ est donc **valide**.

Q23. La relation de Bernoulli généralisée s'écrit

$$P_1 + \frac{\rho {v_1}^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho {v_2}^2}{2} + \rho g z_2 + \frac{64}{\mathcal{R}e}\frac{\rho {v_\mathrm{m}}^2}{2}\frac{h_\mathrm{v}(t)}{d}$$

Or, $P_1 = P_2 = P_0$, $z_1 = h_\mathrm{v}(t)$ et $z_2 = 0$. Par ailleurs, le rétrécissement étant négligé, l'incompressibilité de l'écoulement implique $v_1 = v_2 = v_\mathrm{m}$. La relation de Bernoulli devient alors

$$2gh_\mathrm{v}(t) = \frac{64\,{v_\mathrm{m}}^2}{\mathcal{R}e}\frac{h_\mathrm{v}(t)}{d}$$

En injectant l'expression de $\mathcal{R}e$ puis la relation $d = 2R_1$,

$$g = \frac{32\,\eta\,v_\mathrm{m}}{\rho d^2} = \frac{8\,\eta\,v_\mathrm{m}}{\rho {R_1}^2}$$

Enfin,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h_\mathrm{v}}{\mathrm{d}t} = -v_\mathrm{m} = -\frac{\rho {R_1}^2 g}{8\eta}}$$

Q24. En intégrant la relation précédente,

$$\boxed{h_{\mathrm{v}}(t) = h_0 - \frac{\rho {R_1}^2 g t}{8\eta}}$$

À la fin de la vidange, $h_{\mathrm{v}}(\tau_{\mathrm{v}}) = 0$, soit

$$\boxed{\tau_{\mathrm{v}} = \frac{8\,\eta h_0}{\rho {R_1}^2 g}}$$

Q25. On obtient numériquement $\tau_{\mathrm{v}} = 1{,}3$ s $\approx \tau_{\mathrm{exp}}$: le modèle visqueux semble plus satisfaisant que le modèle parfait. Pour approfondir la modélisation, on pourrait tenir compte du rétrécissement de section par l'ajout d'une **perte de charge singulière**.

Partie III - Autour du sirop d'érable

III.1 - Manchon de sirop d'érable

Q26. D'un point de vue dimensionnel,

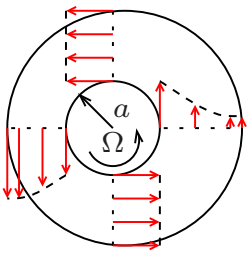
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} \sim \rho v \Omega \qquad \text{et} \qquad \eta\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sim \frac{\eta v}{{h_0}^2}$$

Le premier terme est négligeable devant le second à condition d'avoir

$$\boxed{\Omega \ll \frac{\eta}{\rho {h_0}^2}}$$

Numériquement, $\Omega = 13$ rad.s^{-1} et $\eta/(\rho {h_0}^2) = 5{,}7 \cdot 10^2$ rad.s^{-1} : **cette condition est vérifiée**.

Q27. En $r = a$, $v(a, \theta) = a\Omega, \forall \theta$: **le fluide visqueux adhère au cylindre tournant**.



Q28. Le débit volumique de fluide à travers une section rectangulaire de largeur h et de longueur L s'écrit

$$D_{\mathrm{v}}(\theta) = \int_a^{a+h} \int_0^L v(r,\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y = L \int_a^{a+h} v(r,\theta)\,\mathrm{d}r$$

Le débit volumique par unité de longueur du cylindre s'écrit alors

$$\boxed{Q(\theta) = \frac{D_{\mathrm{v}}(\theta)}{L} = \int_a^{a+h} v(r,\theta)\,\mathrm{d}r}$$

En posant $u = r - a$,

$$Q(\theta) = \int_0^h \left(a\Omega + \frac{\rho g \cos\theta}{2\eta}[u^2 - 2uh]\right)\mathrm{d}u = a\Omega h + \frac{\rho g \cos\theta}{2\eta}\left[\frac{u^3}{3} - u^2 h\right]_0^h$$

$$\boxed{Q(\theta) = a\Omega h - \frac{\rho g \cos\theta\, h^3}{3\eta}}$$

Q29. Avec $Q(\theta) = Q$, la question précédente donne directement

$$\boxed{\frac{\rho g \cos\theta\, h^3}{3\eta} - a\Omega h + Q = 0 = F(h)}$$

Q30. Il s'agit d'assurer une solution h positive à l'équation $F(h) = 0, \forall\theta$. Calculons la dérivée de F :

$$F'(h) = \frac{\rho g h^2}{\eta}\cos\theta - \Omega a$$

Pour $\cos\theta \leq 0$, $F'(h) < 0$: comme $F(0) = Q > 0$, l'équation $F(h) = 0$ admet toujours une solution positive, comme le confirment les courbes données dans l'énoncé. Pour $\cos\theta > 0$, $F'(h)$ s'annule en

$$\tilde{h} = \sqrt{\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}}$$

et

$$F(\tilde{h}) = \frac{\rho g}{3\eta}\left(\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}\right)^{3/2}\cos\theta - \Omega a\left(\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}\right)^{1/2} + Q = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(\Omega a)^3\eta}{\rho g\cos\theta}} + Q$$

Il faut alors imposer $F(\tilde{h}) \leq 0$ pour assurer l'existence d'une solution h positive, soit

$$\boxed{Q < Q_{\max}(\theta) \qquad \text{avec} \qquad Q_{\max}(\theta) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(\Omega a)^3\eta}{\rho g\cos\theta}}}$$

Le cas le plus critique est obtenu lorsque $Q_{\max}(\theta)$ est minimal, soit pour $\cos\theta = 1$: on en déduit

$$\boxed{Q < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(\Omega a)^3\eta}{\rho g}} = Q_{\max}}$$

Q31. La masse de fluide entraînée est maximale pour le débit $Q_{\max}$ calculé à la question précédente. Le débit massique par unité de longueur du cylindre vaut $\rho Q_{\max}$. On intègre ce débit massique sur une période de rotation $2\pi/\Omega$ du cylindre pour avoir la masse de fluide par unité de longueur :

$$\boxed{\frac{m_{\max}}{L} = \frac{2\pi}{\Omega}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(\Omega a)^3\,\rho\eta}{g}} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{\Omega a^3\,\rho\eta}{g}}}$$

III.2 - Mesure de la proportion de saccharose dans le sirop d'érable

Q32. Par la loi de Hess,

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ = \sum \nu_i \Delta_{\mathrm{f}}H_i^\circ = -27 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

puis

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ = \sum \nu_i S_{\mathrm{m},i}^\circ = 5 \text{ J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}}$$

Q33. D'après la loi de Guldberg et Waage,

$$\Delta_{\mathrm{r}}G^\circ = -RT \ln K^\circ$$

Par définition de l'enthalpie libre,

$$\Delta_{\mathrm{r}}G^\circ = \Delta_{\mathrm{r}}H^\circ - T\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ$$

On calcule la constante d'équilibre à $T = 298$ K :

$$\boxed{K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ - T\Delta_{\mathrm{r}}S^\circ}{RT}\right) = 9{,}9 \cdot 10^4 > 10^4}$$

La réaction peut être considérée totale.

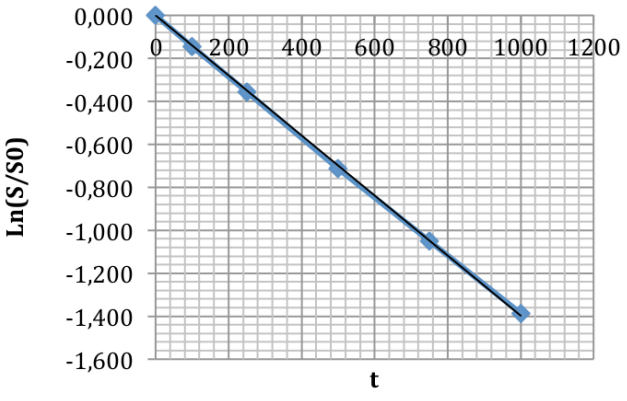
Q34. Dans l'hypothèse d'une réaction d'ordre 1,

$$-\frac{\mathrm{d[S]}}{\mathrm{d}t} = k_1[\mathrm{S}]$$

Cette équation s'intègre en

$$\ln\left(\frac{[\mathrm{S}]}{[\mathrm{S}]_0}\right) = -k_1 t$$

avec $[\mathrm{S}]_0 = [\mathrm{S}](t = 0)$. En traçant $\ln([\mathrm{S}]/[\mathrm{S}]_0)$ en fonction de t (en h), on constate que les points expérimentaux sont alignés : **l'hypothèse de l'ordre 1 est vérifiée** et l'opposé de la pente correspond à la valeur de la constante de vitesse : $\underline{k_1 = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}}$.



Q35. D'après la loi d'Arrhenius,

$$\frac{\mathrm{d}(\ln k)}{\mathrm{d}T} = \frac{E_\mathrm{a}}{RT^2}$$

En l'intégrant entre les températures T_1 (k_1) et T_2 (k_2),

$$\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{E_\mathrm{a}}{R}\left(-\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_1}\right) = \frac{E_\mathrm{a}(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$$

$$\boxed{E_\mathrm{a} = \frac{RT_1T_2}{T_2-T_1}\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = 1{,}1\cdot 10^2 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

Q36. À $P = P^\circ$ et $T = T_\mathrm{fus}$, les phases solide et liquide sont en équilibre, ce qui se traduit par l'égalité des potentiels chimiques de l'eau pure dans chacune des phases :

$$\boxed{\mu^{*,\mathrm{sol}}_\mathrm{eau}(T_\mathrm{fus}) = \mu^{*,\mathrm{liq}}_\mathrm{eau}(T_\mathrm{fus})}$$

Q37. Par définition,

$$\boxed{x_\mathrm{eau} = \frac{n_\mathrm{eau}}{n_\mathrm{eau}+n_\mathrm{sucre}} = \frac{m_\mathrm{eau}/M_\mathrm{eau}}{m_\mathrm{eau}/M_\mathrm{eau}+m_\mathrm{sucre}/M_\mathrm{sucre}}}$$

À $T = T'_\mathrm{fus}$, les phases solide et liquide sont en équilibre. L'égalité des potentiels chimiques de l'eau dans chacune des phases s'écrit

$$\boxed{\mu^{*,\mathrm{sol}}_\mathrm{eau}(T'_\mathrm{fus}) = \mu^{*,\mathrm{liq}}_\mathrm{eau}(T'_\mathrm{fus}) + RT'_\mathrm{fus}\ln x_\mathrm{eau}}$$

Q38. Soustrayons les deux relations obtenues aux questions 36 et 37 :

$$\mu^{*,\mathrm{sol}}_\mathrm{eau}(T'_\mathrm{fus}) - \mu^{*,\mathrm{sol}}_\mathrm{eau}(T_\mathrm{fus}) = RT'_\mathrm{fus}\ln x_\mathrm{eau} + \mu^{*,\mathrm{liq}}_\mathrm{eau}(T'_\mathrm{fus}) - \mu^{*,\mathrm{liq}}_\mathrm{eau}(T_\mathrm{fus})$$

En utilisant la relation de Gibbs-Duhem de part et d'autre,

$$-S^{*,\mathrm{sol}}_\mathrm{eau}(T'_\mathrm{fus}-T_\mathrm{fus}) = RT'_\mathrm{fus}\ln x_\mathrm{eau} - S^{*,\mathrm{liq}}_\mathrm{eau}(T'_\mathrm{fus}-T_\mathrm{fus})$$

$$(S^{*,\mathrm{liq}}_\mathrm{eau} - S^{*,\mathrm{sol}}_\mathrm{eau})(T'_\mathrm{fus}-T_\mathrm{fus}) = RT'_\mathrm{fus}\ln x_\mathrm{eau}$$

Par définition de l'enthalpie de fusion molaire de l'eau pure,

$$\frac{\Delta_\mathrm{fus}H}{T_\mathrm{fus}}(T'_\mathrm{fus}-T_\mathrm{fus}) = RT'_\mathrm{fus}\ln x_\mathrm{eau}$$

$$\boxed{(T'_\mathrm{fus}-T_\mathrm{fus})\Delta_\mathrm{fus}H = RT_\mathrm{fus}T'_\mathrm{fus}\ln x_\mathrm{eau}}$$

Q39. La relation précédente se réécrit

$$(T'_\mathrm{fus}-T_\mathrm{fus})\Delta_\mathrm{fus}H = RT_\mathrm{fus}T'_\mathrm{fus}\ln(1-x_\mathrm{sucre})$$

En supposant $x_\mathrm{sucre} \ll 1$ et $T'_\mathrm{fus} \simeq T_\mathrm{fus}$, un développement limité permet d'écrire

$$(T'_\mathrm{fus}-T_\mathrm{fus})\Delta_\mathrm{fus}H \simeq -RT^2_\mathrm{fus}x_\mathrm{sucre}$$

$$\boxed{T_\mathrm{fus}-T'_\mathrm{fus} = Kx_\mathrm{sucre} \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{RT^2_\mathrm{fus}}{\Delta_\mathrm{fus}H}}$$

Q40. Avec $T_{\text{fus}} - T'_{\text{fus}} = 1{,}5°\text{C}$, on trouve

$$\boxed{x_{\text{sucre}} = \frac{(T_{\text{fus}} - T'_{\text{fus}})\Delta_{\text{fus}}H}{RT_{\text{fus}}^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}}$$

Par définition,

$$x_{\text{sucre}} = \frac{m_{\text{sucre}}/M_{\text{sucre}}}{m_{\text{eau}}/M_{\text{eau}} + m_{\text{sucre}}/M_{\text{sucre}}} \simeq \frac{m_{\text{sucre}}/M_{\text{sucre}}}{m_{\text{eau}}/M_{\text{eau}}}$$

car $x_{\text{sucre}} \ll 1$. Ainsi,

$$M_{\text{sucre}} = \frac{(m_{\text{sucre}}/m_{\text{eau}})M_{\text{eau}}}{x_{\text{sucre}}}$$

La solution étant à 15 % en masse de sirop d'érable, $m_{\text{sucre}}/m_{\text{eau}} = 15/85$. On en déduit

$$\boxed{M_{\text{sucre}} = \frac{15\, M_{\text{eau}}}{85\ x_{\text{sucre}}} = 2{,}1 \cdot 10^2\ \text{g.mol}^{-1}}$$

Q41. Soit n_0 la quantité de matière initiale de saccharose. À l'avancement ξ, un bilan de matière donne $n(\text{S}) = n_0 - \xi$, $n(\text{G}) = n(\text{F}) = \xi$ et $n_{\text{sucre}} = n_0 + \xi$. La proportion molaire en saccharose s'écrit

$$y_{\text{mol}} = \frac{n(\text{S})}{n_{\text{sucre}}} = \frac{1 - \xi/n_0}{1 + \xi/n_0}$$

Par définition,

$$M_{\text{sucre}} = \frac{m_{\text{sucre}}}{n_{\text{sucre}}} = \frac{(n_0 - \xi)M(\text{S}) + \xi M(\text{G}) + \xi M(\text{F})}{n_0 + \xi}$$

$$M_{\text{sucre}} = \frac{(1 - \xi/n_0)M(\text{S}) + (\xi/n_0)[M(\text{G}) + M(\text{F})]}{1 + \xi/n_0}$$

$$\frac{\xi}{n_0}[M_{\text{sucre}} + M(\text{S}) - M(\text{G}) - M(\text{F})] = M(\text{S}) - M_{\text{sucre}}$$

$$\frac{\xi}{n_0} = \frac{M(\text{S}) - M_{\text{sucre}}}{M_{\text{sucre}} + M(\text{S}) - M(\text{G}) - M(\text{F})} = 0{,}69$$

On en déduit

$$\boxed{y_{\text{mol}} = \frac{1 - \xi/n_0}{1 + \xi/n_0} = 0{,}19}$$

La proportion massique en saccharose s'écrit

$$y_{\text{mas}} = \frac{m(\text{S})}{m_{\text{sucre}}} = \frac{m(\text{S})}{n_{\text{sucre}}}\frac{n_{\text{sucre}}}{m_{\text{sucre}}} = \frac{(n_0 - \xi)M(\text{S})}{n_0 + \xi}\frac{1}{M_{\text{sucre}}} = \frac{1 - \xi/n_0}{1 + \xi/n_0}\frac{M(\text{S})}{M_{\text{sucre}}}$$

En reconnaissant la proportion molaire déjà calculée,

$$\boxed{y_{\text{mas}} = y_{\text{mol}}\frac{M(\text{S})}{M_{\text{sucre}}} = 0{,}31}$$