PROBLÈME 1
Un modèle simplifié de sismographe

Q1. λ représente le coefficient de frottement fluide.

Il s'exprime en kgs^{-1} ou en $Nm^{-1}s$.

Q2. La masse est soumise à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la force de rappel de ressort $\overrightarrow{T}$.

La masse étant en équilibre, le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_{z'}}$ et $\overrightarrow{T} = -k(\ell_1 - \ell_0)\overrightarrow{u_{z'}}$.

on obtient alors $\ell_1 = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$.

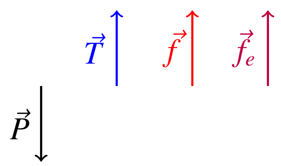
Q3. force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_e} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\overrightarrow{a_s}$

force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_c} = -m\overrightarrow{a_c} = -2m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$.

comme $\mathcal{R}'$ est animé d'un mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$, la force d'inertie de Coriolis est nulle car $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$.

Q4. bilan des forces : poids $\overrightarrow{P}$, force de rappel de ressort $\overrightarrow{T}$, force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_e}$, force de frottement $\overrightarrow{f}$.

Représentation des forces avec les contraintes de l'énoncé :



Q5. PFD : $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{T}+\overrightarrow{f_e}+\overrightarrow{f}=m\overrightarrow{a'}$.

projection : $mg - k(l_1 - l_0 + z') - m\ddot{z}'_s - \lambda\dot{z}' = m\ddot{z}'$

comme $l_1 - l_0 = \dfrac{mg}{k}$ et $\ddot{z}'_s = -E_m\omega^2 cos(\omega t + \Phi)$,

on obtient : $\ddot{z}' + \dfrac{\lambda}{m}\dot{z}' + \dfrac{k}{m}z' = E_m\omega^2 cos(\omega t + \Phi)$

Q6. Par identification on trouve $\omega_0 = \dfrac{k}{m}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}$.

ω_0 représente la pulsation propre et Q la facteur de qualité.

Q7. Le terme en $\dfrac{1}{Q}$ devient négligeable et on obtient $\ddot{z}' + \omega_0^2 z' = E_m\omega^2 cos(\omega t + \Phi)$.

Q8. En notation complexe, on pose $\underline{z'} = Z_m exp(j\Phi')exp(j\omega t)$ et $\underline{z'_s} = E_m exp(j\Phi)exp(j\omega t)$.

L'équation précédente permet alors après simplification par $exp(j\omega t)$ et passage au module de trouver $Z_m = E_m \dfrac{\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

Q9. L'expression précédente s'écrit $Z_m = E_m \dfrac{u^2}{|1 - u^2|}$.

On vérifie les trois propriétés suivantes :
lorsque $u \longrightarrow 0$, $Z_m \longrightarrow 0$
lorsque $u \longrightarrow \infty$, $Z_m \longrightarrow E_m$
lorsque $u \longrightarrow 1$, $Z_m \longrightarrow +\infty$

Q10. Le phénomène est la résonance.

La zone de fonctionnement du sismographe est la zone III car le mouvement de la masse doit avoir la même amplitude que celui du sol.

Zone III (celle non encore envisagée) : les oscillations sont très amorties. Cela correspond aux amortisseurs des véhicules.

PROBLÈME 2
Un modèle simplifié de tornade

Q11. $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$.
Au niveau local ce vecteur représente le rotation de la particule de fluide

Ce vecteur est nul si $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$.
L'écoulement est dit irrotationnel
et la vitesse dérive d'un potentiel car on peut écrire $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\phi$.

Q12. Écoulement parfait : les effets de la viscosité sont négligeables par rapport aux autres phénomènes
Écoulement homogène et incompressible : la masse volumique du fluide est constante dans le temps et dans l'espace : $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ ou $div\,\vec{v} = 0$ et $\overrightarrow{grad}\mu = \vec{0}$.
Écoulement stationnaire : les grandeurs caractéristiques de l'écoulement ne dépendent pas du temps.

Q13. Comme $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{u_\theta}$, les lignes de courant sont des cercles concentriques centrés sur l'axe OZ situés dans des plans perpendiculaires à OZ.

Accepter tout schéma correct : perspective lisible ou représentation plane.

Q14. Deux méthodes de calcul : circulation de la vitesse le long d'une ligne de champ et utilisation du théorème de Stokes ou calcul direct à partir du vecteur tourbillon.

Première méthode : Circulation et théorème de Stokes
On considère un contour circulaire Γ (ligne de courant) orienté dans le sens de $\overrightarrow{u_\theta}$ de rayon r quelconque. La surface délimitée par ce contour S est donc orientée également.

La circulation de la vitesse s'écrit $\oint_\Gamma \overrightarrow{v_\theta(r)}.\overrightarrow{dl} = \oint_\Gamma v_\theta(r)dl.$

Comme la vitesse ne dépend que de r, on obtient finalement $\oint_\Gamma \overrightarrow{v_\theta(r)}.\overrightarrow{dl} = 2\pi r v_\theta(r).$

D'autre part, le théorème de Stokes permet d'écrire $\oint_\Gamma \overrightarrow{v_\theta(r)}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\overrightarrow{v_\theta}(r)\overrightarrow{dS}.$

Soit $\iint_S 2\overrightarrow{\Omega}\overrightarrow{dS} = \iint_S 2\Omega dS$

Cas $0 \leqslant r \leqslant R$: $\Omega = \Omega_0$ et$2\pi r v_\theta(r) = 2\Omega_0 \pi r^2$ et $v_\theta(r) = \Omega_0 r.$

Cas $R \leqslant r$: $\Omega = 0$ et $2\pi r v_\theta(r) = 2\Omega_0 \pi R^2$ et $v_\theta(r) = \Omega_0 \dfrac{R^2}{r}.$

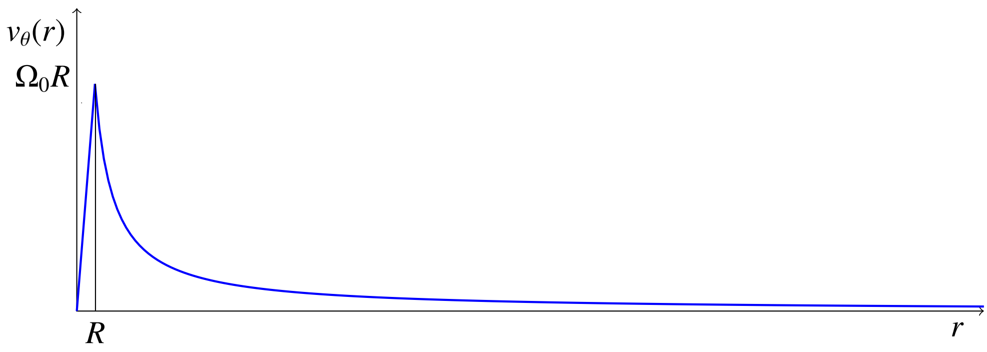
Deuxième méthode : calcul direct
$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\Omega}$ avec $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r v_\theta(r))}{\partial r}\overrightarrow{u_z}.$
Premier cas : $r > R$
$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r v_\theta(r))}{\partial r}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}.$
En intégrant on obtient $v_\theta(r) = \dfrac{A}{r}.$

Deuxième cas : $r < R$
$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r v_\theta(r))}{\partial r}\overrightarrow{u_z} = 2\overrightarrow{\Omega_0}.$
En intégrant on obtient $v_\theta(r) = \Omega_0 r + \dfrac{B}{r}.$

Détermination des constantes d'intégration A et B
La vitesse ne pouvant pas diverger, $B = 0.$
La continuité de la vitesse en $r{=}R$ impose $A = \Omega_0 R^2.$

conclusion
$r > R : v_\theta(r) = \dfrac{\Omega_0 R^2}{r}.$
$r < R : v_\theta(r) = \Omega_0 r.$

Q15. Représentation graphique :



Analogie magnétique : champ magnétique créé par un fil épais parcouru par un courant.

Q16. Pour r supérieur à R l'écoulement est parfait, homogène, incompressible, stationnaire et irrotationnel, la relation de Bernoulli est donc valable en tout point du fluide.

Q17. La relation de Bernoulli s'écrit alors $P(r) + \mu\dfrac{v_\theta(r)^2}{2} = P_\infty + \mu\dfrac{v_\infty^2}{2}$ car on néglige les effets de la pesanteur.

Comme la vitesse est nulle à l'infini, $P(r) = P_a - \dfrac{\mu\Omega_0^2 R^4}{2r^2}$.

Q18. Pour ces valeurs de r l'écoulement n'est pas irrotationnel. Le relation de Bernoulli n'est donc valable que le long d'une ligne de courant.

Sur une ligne de courant, r est constant. Il est donc impossible de déterminer l'expression de P(r).

Q19. Le relation d'Euler s'écrit $\mu\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \mu\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) - \mu\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f_v} - \overrightarrow{grad}P$.

Le régime est stationnaire et on néglige les effets de la pesanteur, cette relation s'écrit donc $\mu\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) - \mu\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{grad}P$.

Comme $\overrightarrow{v} = \Omega_0 r\overrightarrow{u_\theta}$ et $-\overrightarrow{grad}P = -\dfrac{dP(r)}{dr}\overrightarrow{u_r}$, on obtient l'équation $\dfrac{dP(r)}{dr} = -\mu\Omega_0^2 r$.

En intégrant et en tenant compte de la continuité de la pression on arrive finalement à l'expression de la pression $P(r) = P_a + \mu\Omega_0^2\left(\dfrac{r^2}{2} - R^2\right)$.

Q20. On a donc : pour $r \leqslant R$, $P(r) - P_a = \mu\Omega_0^2\left(\dfrac{r^2}{2} - R^2\right)$ et pour $r \leqslant R$, $P(r) - P_a = \dfrac{-\mu\Omega_0^2 R^4}{2r^2}$

La dépression est "maximale" pour r=0 et "vaut" $-\mu\Omega_0^2 R^2$.

Pour r=0, on est dans l'œil de la tornade qui est l'endroit le plus dangereux.