Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+3)}.$$
2. Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\,\alpha\,.$$
3. **Espérance et variance de X**
   - **3.1.** Après avoir justifié son existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
     On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*
   - **3.2.** Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1))$.
   - **3.3.** En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.
2. Soit p un entier non nul.
   Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.
3. Soit $P \in E_n$.
   Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de E_n tel que :
$$\forall\, x \neq 1,\quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.
5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.
   Déterminer A et A^{-1}.
7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.
8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme Q de E_n.
   À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
   On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ *et* $\alpha \neq 1$.
10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.
11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

EXERCICE 3

1. Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et $T-$périodique.

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u\,.$

$* * * * * *$

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$x\,y''(x) + y'(x) - 4\,x\,y(x) = 0\,. \quad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et telle que $g(0) = a_0 = 1$.

2.1. Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n+1} et a_{n-1}.

2.2. Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.

2.3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \;\mapsto\; F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(2x\cos(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

3. Quelques propriétés de la fonction F

3.1. Étudier la parité de la fonction F.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.

3.2. Pour tout couple (x,t) de $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, on pose $h(x,t) = \exp\left(2x\cos(t)\right)$.

3.2.1. Justifier que h est C^1 sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$.

3.2.2. Prouver que pour k non nul, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$.

3.2.3. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x,t) \in I\times[0,2\pi],\ 0 \leqslant \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant M_k\,.$$

3.2.4. En déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.2.5. Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N}^*$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

3.3. Démontrer que F vérifie la relation $(**)$.

4. Développement en série entière de F

4.1. Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

4.2. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\, x^n$$

où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4.3. Calculer J_0 et J_1.

4.4. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.

4.5. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de J_n en fonction de n.

4.6. Comparer alors les fonctions F et g.

EXERCICE 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.
O_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note enfin $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Question de cours

Démontrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition et pour la multiplication matricielle.

* * * * * *

Partie 1

2. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

On considère les matrices par blocs de taille $2n$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda\, I_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

2.1. Calculer UV et VU.

2.2. Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

3. Justifier que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $M^T M$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^T M = R^T\, M M^T\, R$.

Partie 2

On note Δ_n l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice Q dans $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T\, M\, Q = M^T$. Une telle matrice M sera dite *orthotransposable*.
On rappelle que si $\mathcal{S}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{A}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n\,.$$

5. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est inclus dans Δ_n .

6. Démontrer que : $\forall\, A \in \mathcal{A}_n$ et $\forall\, Q \in O_n(\mathbb{R})$, $Q^{-1}AQ \in \mathcal{A}_n$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe une matrice $T \in O_n(\mathbb{R})$, une matrice D diagonale et une matrice $A \in \mathcal{A}_n$ telles que :

$$M = T(D + A)T^{-1}.$$

8. Cas $n = 2$: on démontre que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*

8.1. Déterminer **toutes** les matrices **à la fois** orthogonales **et** diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

8.2. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Déterminer alors une matrice W orthogonale **et** diagonale telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ L^T = W^T L W.$$

8.3. En utilisant la question **7**, démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*.

9. On revient au cas général et on suppose à présent que n est impair
Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B] = AB - BA$.

9.1. Montrer que si $M \in \Delta_n$, alors $[M^T, M]$ est semblable à son opposée.

9.2. En déduire que si $M \in \Delta_n$, alors $\det\big([M^T, M]\big) = 0$.

Corrigé

Correction PSI 2022

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

1. Pour tout entier n positif :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{(n+3-n)}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$

2. On doit forcément avoir $\alpha \geqslant 0$, sinon on aurait des probabilités négatives.

Puis, il suffit de trouver les valeurs de α pour lesquelles $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$.

Or, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)} &= \alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \alpha\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right) \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6}\alpha$.

La seule valeur de α qui convient est 6.

3. Soit $\alpha = 6$.

3.1. Sous réserve de convergence, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, P([X=n])$.

On a alors pour tout entier naturel n non nul : $n\,P([X=n]) = \dfrac{18n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

La série de terme général $\dfrac{18n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ est absolument convergente car ses termes sont positifs et $\dfrac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{18}{n^3}$, ce dernier terme général étant celui d'une série de Riemann convergente.

Il en résulte que X admet une espérance.

De plus :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= 9\sum_{n=1}^{N} \frac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= 9\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ &= 9\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+2)(N+3)}\right)\end{aligned}$$

par télescopage.

On en déduit que : $\boxed{E(X) = \dfrac{3}{2}}$

3.2. On utilise le théorème de transfert.

Sous réserve de convergence, il vient : $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{n\geq 1} \frac{18n(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

La série de terme général $\frac{18n(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ est absolument convergente car ses termes sont positifs et $\frac{18}{(n+2)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{18}{n^2}$.

Ainsi $X(X+1)$ admet une espérance.

De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{18}{(n+2)(n+3)} &= 18 \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)} \\ &= 18 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\ &= 18\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{N+3}\right) \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\mathbb{E}(X(X+1)) = 6}$

3.3. D'après les deux question précédentes, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Or $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$, donc $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{9}{4}}$

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, n est un entier non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{r} q = r+1$, sinon $\sum_{k=0}^{r} q = \frac{q^{r+1}-1}{q-1}$.

2. Soit p un entier non nul.

Pour $p > 1$, on reconnaît la formule de Bernoulli : $X^p - 1 = (X-1)\left(1 + X + ... + X^{p-1}\right)$

Le reste de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X-1$ est donc nul et son quotient est $1+X+...+X^{p-1}$.

Pour $p = 1$, le reste est toujours nul et le quotient est 1.

3. Soit $P \in E_n$.

En notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1 + x + ... + x^k\right)$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1 + x + ... + x^k\right)$ convient.

C'est le seul car si un polynôme L convient, il coïncide avec Q pour tout réel différent de 1 et par suite, $L - Q$ admet une infinité de racines c'est donc le polynôme nul et l'on peut affirmer : $L = Q$. Q est donc l'unique solution du problème posé.

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. D'après ce qui précède, pour tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de E_n, $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1 + x + ... + x^k\right)$, ce qui démontre que $f(P) \in E_n$.

De plus, en notant $P_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $P_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes de E_n et λ un réel, il vient immédiatement :

$$f\left(\lambda P_1 + P_2\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k + b_k}{k+1}\left(1 + x + ... + x^k\right) = \lambda f(P_1) + f(P_2).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E_n}$

5. Soit $P \in E_n$ tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

En notant encore $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1 + x + ... + x^k\right) = 0$$

La famille de polynôme $\left(1 + X + ... + X^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre car formée de polynômes non nuls échelonnés en degré, ainsi : $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = 0$, et par suite $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On peut raisonner autrement : $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \iff \forall\, x \neq 1, \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Alors, par dérivation, on obtient : $\forall\, x \neq 1$, $P(x) = 0$.

Comme précédemment, $P - 0_{\mathbb{R}[X]}$ est un polynôme qui possède une infinité de racines : c'est le polynôme nul et $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On en déduit que l'endormorphisme f est injectif, et puisque E_n est de dimension finie, f est un **automorphisme** de E_n.

Enfin, pour tout polynôme P de E_n, on a $(f(P)(X-1))' = P$ ce qui permet d'écrire :

$$f^{-1} : \begin{cases} E_n & \to E_n \\ Q & \mapsto Q + (X-1)Q' \end{cases}$$

6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.

Pour tout entier k de $[\![0,n]\!]$, $f\left(X^k\right) = \dfrac{1}{p+1}\left(1 + X + ... + X^k\right)$ et $f^{-1}(X^k) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$ on en déduit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$

7. A et A^{-1} étant triangulaires supérieures, on a immédiatement :

$$\mathbf{Sp}(A) = \left\{\frac{1}{k},\; k \in [\![1, n+1]\!]\right\} \text{ et } \mathbf{Sp}\left(A^{-1}\right) = [\![1, n+1]\!]$$

8. Les matrices A et A^{-1} sont des matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et ont $n+1$ valeurs propres distinctes elles sont donc diagonalisables.

9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme Q de E_n.
Alors il existe un polynôme R tel que : $Q = (X-\alpha)^k \times R$ et R n'admet pas α pour racine. ($R(\alpha) \neq 0$)
Il vient alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) &= (X-\alpha)^k R + (X-1)(X-\alpha)^k R' + k(X-\alpha)^{k-1} R \\ &= (X-\alpha)^{k-1} \times \left[(X-\alpha)R + (X-1)(X-\alpha)R' + k(X-1)R\right] \end{aligned}$$

On en déduit que α est une racine d'ordre au moins $k-1$ de $f^{-1}(Q)$.
Soit $S = (X-\alpha)R + (X-1)(X-\alpha)R' + kR$, on a : $S(\alpha) = k(\alpha-1)R(\alpha)$.
On peut alors conclure suivant les différents cas :

- Si $\alpha = 1$:
  α est racine d'ordre exactement k de $f^{-1}(Q)$ car $f^{-1}(Q) = (X-1)^k\, T$ avec $T(1) = (k+1)\, R(1) \neq 0$.
- Si $\alpha \neq 1$:
  - Si $k > 1$: α est racine d'ordre exactement $k-1$ de $f^{-1}(Q)$ car $f^{-1}(Q) = (X-\alpha)^{k-1}\, T$ avec $T(\alpha) = k(X-1)R(\alpha) \neq 0$.
  - Si $k = 1$, α n'est pas racine de $f^{-1}(Q)$ car $f^{-1}(Q)(\alpha) = k\, R(\alpha) \neq 0$.

10. La matrice A^{-1} est triangulaire supérieure et donc : $\mathbf{Sp}\left(f^{-1}\right) = \mathbf{Sp}\left(A^{-1}\right) = [\![1, n+1]\!]$.
Il y a $n+1$ valeurs propres dans un espace de dimension $n+1$: on retrouve que l'endomorphisme f^{-1} est diagonalisable et de plus, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
Plus précisément, on a :

$$E_k\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k-1}\right),\; k \in [\![1, n+1]\!]$$

11. k étant non nul, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) = kQ &\Leftrightarrow Q = f(kQ) \text{ car } f \text{ est un automorphisme} \\ &\Leftrightarrow f(Q) = \frac{1}{k} Q \end{aligned}$$

Ainsi $Q \in E_k\left(f^{-1}\right) \Leftrightarrow Q \in E_{\frac{1}{k}}(f)$
Donc les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Noter que tout devient très simple si, dès le début, on se place dans la base $\mathscr{E} = (1, X-1, (X-1)^2, ..., (X-1)^n)$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et $T-$périodique.
On peut par exemple, poser pour tout x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^T f(u)$.
La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (f est continue sur $\mathbb{R}$) et par dérivation on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \varphi'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

On en déduit que φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Or $\varphi(0) = 0$ donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$.

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$x\,y''(x) + y'(x) - 4\,x\,y(x) = 0 \quad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et telle que $g(0) = a_0 = 1$.

2.1. Sous réserve que g existe sur un intervalle $]-R, R[$, où R est un réel strictement positif, on a, par dérivation terme à terme d'une fonction développable en série entière : $\forall x \in]-R, R[$:

$$g'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$g''(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$$

g étant solution de $(**)$ on a alors pour tout réel x dans $]-R, R[$: :

$$xg''(x) + g'(x) - 4xg(x) = 0 \Leftrightarrow a_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left((n+1)^2 a_{n+1} - 4a_n\right) x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière on a donc :

$$\begin{cases} \qquad\qquad a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \dfrac{4}{(n+1)^2} a_{n-1} \end{cases}$$

2.2. En distinguant les cas pairs et impairs et par une récurrence immédiate, on déduit de la question précédente : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{1}{(p!)^2}$.

2.3. En utilisant la règle de d'Alembert pour les séries numériques, pour $x \neq 0$, comme

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} x^{2(n+1)}}{a_{2n} x^{2n}} \right| = \frac{x^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

la solution trouvée $g(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

3. Quelques propriétés de la fonction F.

3.1. Pour tout réel x, en utilisant le changement de variable $u = \pi - t$:

$$\begin{aligned} F(-x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-2x\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(2x\cos(u))\,\mathrm{d}u \\ &= F(x) \text{ d'après la question de cours comme } u \mapsto \exp(2x\cos(u)) \text{ est } 2\pi\text{-périodique.} \end{aligned}$$

Ainsi, F est paire.

3.2. Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x\cos(t))$.
Soit I un segment de $\mathbb{R}$.

3.2.1. h est C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ par opérations sur des fonctions C^1.

3.2.2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi]$, $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (2\cos(t))^k h(x, t)$.

Et par les théorèmes généraux et la question **3.2.1.**, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.3. On en déduit :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi],\ 0 \leqslant \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leqslant 2^k\,|h(x, t)| \leqslant 2^k\,M.$$

car h est continue sur le compact $I \times [0, 2\pi]$ et donc, bornée sur ce compact par un réel positif M.
On peut alors choisir $M_k = 2^k M$.

3.2.4. Par domination par une constante pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que F est de classe C^k sur I pour tout entier naturel k.
Il en résulte que F est de classe C^∞ sur I et donc sur $\mathbb{R}$.

3.2.5. Et de plus, pour tout entier naturel k et pour tout réel x :

$$F^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\cos(t))^k \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

3.3. Soit x un réel :

$$\begin{aligned}2\pi\left(xF''(x) + F'(x) - 4xF(x)\right) &= \int_0^{2\pi}\left(4x\cos^2(t) + 2\cos(t) - 4x\right)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -4x\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{2\pi}\cos(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\text{Par intégration par parties à justifier} \ : \ \int_0^{2\pi}\cos(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t = x\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Et finalement} \ : \ xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = 0$$

ce qui prouve que F est solution de $(**)$.

4. Développement en série entière de F.

4.1. D'après le cours, $\forall t \in \mathbb{R} : \ \exp(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}$.

4.2. On remarque tout d'abord que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{|2x\cos(t)|^k}{k!}\mathrm{d}t\right)$ converge pour tout réel x par comparaison, puisque son terme général est majoré par le terme général d'une série convergente :

$$\int_0^{2\pi}\frac{|2x\cos(t)|^k}{k!}\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\frac{|2x|^k}{k!}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(2x\cos(t))^k}{k!}\mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(2x)^k}{2\pi k!}\left(\int_0^{2\pi}(\cos(t))^k\mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^{k-1}}{\pi k!}J_k x^k\end{aligned}$$

où $J_k = \int_0^{2\pi}(\cos(t))^k\mathrm{d}t$

4.3. Facilement, $J_0 = 2\pi$ et $J_1 = 0$.

4.4. Soit n un entier supérieur à 2.

On intègre par parties en utilisant les fonctions u et v de classe C^1 :

$u(t) = \cos^{n-1} t$ et $v(t) = \sin t$.

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-1}\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= \Big[\sin(t)\cos^{n-1}(t)\Big]_0^{2\pi} + (n-1)\int_0^{2\pi} \cos^{n-2}(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t \\ &\text{avec } \sin^2(t) = 1-\cos^2(t) \text{ on a la relation :} \end{aligned}$$

$$J_n = (n-1)(J_{n-2} - J_n)$$

On en déduit : $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$.

4.5. Pour tout entier n on obtient par une récurrence rapide : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $J_{2n+1} = 0$ et $J_{2n} = 2\pi\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$

4.6. On résume ce que l'on a trouvé : F est
- solution de $(**)$,
- développable en série entière,
- vaut 1 en 0,
- les coefficients des développements en série entière de F et g sont égaux.

Ainsi : $F = g$.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.
O_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de cet espace.
On note enfin $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Question de cours

1. Facilement :
$M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T M = I_n \Leftrightarrow M^T = M^{-1} \Leftrightarrow MM^T = I_n \Leftrightarrow M^T \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition.
Soient $(A, B) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2$, on a $(AB)^T(AB) = B^T(\underbrace{A^T A}_{=I_n})B = B^T B = I_n$, donc $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication matricielle.

Partie 1

2. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1. On a, en effectuant les produits par blocs :

$$UV = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -A & -AB + \lambda I_n \end{pmatrix} \text{ et } VU = \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & 0 \\ -\lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

2.2. On sait d'après le cours que : $\det(UV) = \det(VU)$.
Or : $\det(UV) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda)$ et $\det(VU) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$.
Il en résulte que les polynômes caractéristiques de AB et de BA coïncident sur $\mathbb{R}^*$, ils sont donc égaux.

3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\left(M^T M\right)^T = M^T M$. La matrice $M^T M$ est donc symétrique réelle et, d'après le théorème spectral, diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

4. D'après la question **2.** les polynômes caractéristiques de $M^T M$ et de MM^T sont égaux et donc, ces matrices ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.
De plus, elles sont diagonalisables car symétriques réelles.
Il existe donc deux matrices orthogonales P et Q et une matrice diagonale D telles que :

$$M^T M = PDP^T \text{ et } MM^T = QDQ^T$$

Alors :

$$M^T M = Q^T PMM^T P^T Q = R^T MM^T R \text{ où } R = P^T Q \in O_n(\mathbb{R})$$

Ce qui prouve le résultat, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M^T M = R^T\, MM^T\, R$$

Partie 2

On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice $Q \in O_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T\, M\, Q = M^T$. Une telle matrice M sera dite *orthotransposable*.
On rappelle que si $\mathcal{S}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{A}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n.$$

5. Soit $S \in \mathcal{S}_n$ on a $S^T = S = I_n^T S I_n$ et comme $I_n \in O_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $S \in \mathcal{T}_n$.

6. Soient $A \in \mathcal{A}_n$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\left(Q^{-1}AQ\right)^T &= Q^T A^T \left(Q^{-1}\right)^T \\ &= -Q^T A \left(Q^{-1}\right)^T \text{ car } A \in \mathcal{A}_n \\ &= -Q^{-1} A\, Q \text{ car } Q^{-1} = Q^T\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $Q^{-1}AQ \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en utilisant la somme directe indiquée en introduction de la question :

$$\exists\, (S, A_1) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n,\ M = S + A_1.$$

Comme $S \in \mathcal{S}_n$, S est diagonalisable dans une base orthonormale, et donc, $\exists\, T \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $S = TDT^{-1}$.
On a alors : $M = TDT^{-1} + A_1 = T(D + \underbrace{T^{-1}A_1T}_{\in \mathcal{A}_n})T^{-1} = T\,(D + A)\,T^{-1}$ en ayant posé $A = T^{-1}\, A_1\, T$ qui est encore un élément de $\mathcal{A}_n$ d'après la question précédente.
Toute matrice peut donc s'écrire $M = T(D + A)T^{-1}$, avec D diagonale, A antisymétrique et T orthogonale.

8. Cas $n = 2$.

8.1. Soit M une matrice diagonale de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors , il existe deux réels a et b tels que $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Cette matrice est orthogonale si, et seulement si, $a^2 = b^2 = 1$.
Les matrices diagonales et orthogonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sont donc les matrices de l'ensemble :

$$\left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8.2. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

La matrice $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale et diagonale et telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ L^T = W^T L W.$$

8.3. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
D'après la question **7.** : il existe $T \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{L}$ telles que $M = TLT^{-1}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} M^T &= \left(TLT^{-1}\right)^T \\ &= \left(T^{-1}\right)^T L^T T^T \\ &= \left(T^{-1}\right)^T W^T L W T^T \\ &= \left(T^{-1}\right)^T W^T T^{-1} M T W T^T \\ &= Q M Q^{-1}, \end{aligned}$$

en posant $Q = \left(T^{-1}\right)^T W^T T^{-1} = T W T^T \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$
Ce qui prouve donc que M est orthotransposable.

9. On suppose à présent que n est impair.
Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B] = AB - BA$, matrice appelée *crochet de Lie* de A et B.

9.1. Soit $M \in \Delta_n$, alors : Il existe un unique couple $(A, S) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{S}_n$ tel que $M = A + S$.
De plus il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^T M Q = M^T$ puisque M est supposée orthotransposable.
Alors : $Q^T A Q = -A$ et $Q^T S Q = S$.
On a donc :

$$\begin{aligned} [M^T, M] &= M^T M - M M^T \\ &= (-A + S)(A + S) - (A + S)(-A + S) \\ &= 2(SA - AS) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q^T[M^T, M]Q &= 2Q^T(SA - AS)Q \\ &= 2\left(Q^T S QQ^T AQ - Q^T AQQ^T S Q\right) \\ &= 2(-SA + AS) \\ &= -[M^T, M] \end{aligned}$$

et ainsi, $[M^T, M]$ est semblable à son opposé.

9.2. Comme $[M^T, M]$ est semblable à son opposé, alors :

$$\det\left([M^T, M]\right) = \det\left(-[M^T, M]\right) = (-1)^n \det\left([M^T, M]\right).$$

L'entier naturel n étant impair on en déduit : $\det\left([M^T, M]\right) = 0$.

• Commentaires généraux

Malheureusement, il me faut reprendre les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PSI.
Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PSI et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.
Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

Conclusion : Nous demandons dans la rédaction des exercices constituant du sujet de la rigueur et une justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons qu'il vaut mieux admettre le résultat d'une question clairement et continuer à traiter le reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires détaillés exercice par exercice

Dans cette partie du rapport, nous avons voulu insister sur les points les plus négatifs rencontrés lors de la correction des copies, ceci afin d'aider les étudiants à ne pas faire ce genre d'erreurs, parfois grossières et souvent faciles à éviter.

Exercice 1

1. Justifications souvent alambiquées : noter qu'il suffisait de trouver des valeurs de a et de b et de vérifier qu'elles conviennent en réduisant au même dénominateur.
2. L'erreur la plus fréquente rencontrée est la manipulation de séries divergentes : il vaut toujours mieux manipuler des sommes partielles.
Nous avons trop souvent lu : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)}$!
Noter que pratiquement aucun candidat ne précise que α doit être positif.

3.

3.1. L'absolue convergence pour prouver l'existence de l'espérance est très peu citée et les calculs ne sont pas toujours menés jusqu'au bout.

3.2. Mêmes remarques qu'à la question précédente. Ne pas oublier de citer les théorèmes utilisés.

3.3. Il n'y a que trop rarement de justification de l'existence de la variance.

Exercice 2

1. Quelques réponses très farfelues du type $1 + q + ... + q^r$!
2. Le lien avec la question précédente n'a pas toujours été vu.
On voit parfois apparaître des racines n-ièmes de l'unité sans pour autant simplifier le quotient.
Enfin, le cas $q = 1$ n'est presque jamais évoqué !
3. Il est rarement démontré que Q est une fonction polynomiale.
Rappelons que la "dimension" d'un polynôme n'a pas de sens.
4. Les étudiants savent en général ce qu'il faut démontrer mais ont de grosses difficultés à écrire des choses qui ont un sens. En particulier, $f(P(x))$ au lieu de $f(P)(x)$, etc...
5. $\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ n'implique pas que $\forall\, t \in [1, x]$, $P(t) = 0$.
L'argument de dimension est souvent flou.
Les calculs pour obtenir f^{-1} ne sont pas toujours bien justifiés.
Certains candidats confondent l'existence d'une image unique avec l'existence d'un antécédent unique.
6. En général la matrice A est obtenue.
7. Préoccupant : après le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire afin d'obtenir les valeurs propres de A, rares sont les candidats qui en déduisent les valeurs propres de A^{-1}.
Trop de candidats ne réalisent pas l'incohérence entre leurs différents résultats (valeurs propres de A et valeurs propres de A^{-1}).
8. Le fait que les résultats soient liés ne semble pas évident pour certains.
9. et **10.** La définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme pose problème à beaucoup de candidats et rendent les choses difficile.
11. Question qui se traite indépendamment mais qui n'a pas été vue.

Exercice 3

1. Nous posons cette question très souvent et invitons donc les candidats à lire la correction proposée ici. Rappelons toutefois que la primitive d'une fonction périodique n'est pas a priori une fonction périodique. Que lorsque l'on fait un changement de variable, ça n'est pas la périodicité de f qui transforme $f(x+u)$ en $f(x)$.
2.
2.1. Question relativement bien traitée mais trop peu de justifications surtout pour dériver terme à terme et pour identifier.
2.2. Le fait que les termes d'indices impairs sont nuls n'est pas systématiquement vu et ceux d'indices pairs conduisent à des erreurs qu'une vérification aurait pu détecter.
2.3. Oubli des valeurs absolues dans la règle de d'Alembert.
3.
3.1. A la question « quelle est la parité de F ? », beaucoup de candidats répondent que F est $\pi-$périodique, voire $2\pi-$paire !
Beaucoup trop de candidats semblent ignorer que $\cos(\pi - u) = -\cos(u)$.
3.2.
3.2.1. et **3.2.2.** Raisonnements bien compliqués parfois.
3.2.3. Attention aux inégalités : $x \leqslant M$ n'implique pas toujours que $2\,x\,\cos(t) \leqslant 2\,M$.
3.2.4. Souvent, le passage de I à $\mathbb{R}$ est occulté.
3.2.5. Pas de problème.
3.3. Ici, beaucoup d'arguments fallacieux pour arriver au résultat.
4.
4.1. Il est étonnant de constater que que certains étudiants sont incapables d'écrire le développement en série entière autour de 0 de la fonction exponentielle ou de donner un domaine de convergence juste.
4.2. L'interversion demandée est en général vue mais appliquée sans trop de justification...
4.3. Pas de problème (Heureusement)
4.4. Bien que cette question soit très classique, que d'erreurs ! !
4.5. Oubli d'élimination des termes impairs.
4.6. Très peu traité.

Exercice 4

1. La stabilité par transposition est une duperie dans quasiment toutes les copies car n'est pas évoqué le fait que M et sa transposée soient inverses l'une de l'autre.
Beaucoup de candidats affirment que $M \in O_n \iff \det(M) \in \{-1, 1\}$.
Certains confondent l'ensemble des matrices orthogonales (pourtant bien défini dans l'énoncé) avec la matrice nulle et montrent donc que la matrice nulle est stable par ...
2.
2.1. Globalement réussi.
2.2. Le lien avec la question précédente est rarement fait.
Certains étudiants affirment que $AB = BA$ et d'autres que $\det(\lambda\, I_n) = \lambda$ et d'autres enfin que

$$\det(XI_n - AB) = \det(XI_n) - \det(AB) \quad !\,!$$

3. Globalement correct.
4..Lorsque la question est traitée, il est mentionné que les valeurs propres sont égales mais pas que leurs multiplicités le sont également.

5. et **6.** Correct.
La suite n'est quasiment pas abordée.

FIN