ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0 \qquad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3. On pose alors $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\,\mathrm{id}_E$.

3.1. Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

3.2. Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

3.3. Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

3.4. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.1. Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. *On fera apparaître les calculs sur la copie.*

5.2. Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question **3.**

5.3. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.

5.4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul.

Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1 - x)^\alpha$.

En déduire un équivalent de $1 - (1 - x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A)\ \ \mathrm{e}^{b\ln(a)} \qquad (B)\ \ \mathrm{e}^{a\ln(b)} \qquad (C)\ \ \mathrm{e}^{\ln(a)\ln(b)}.$$

*****

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

3.1. Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

3.2. Montrer que la série de terme général a_k est convergente.
On notera S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Démontrer que $\forall\, k \geqslant 1$, $u_k > 0$.

4.2. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda\, u_k$, où λ est un réel. Déterminer λ.

4.3. Montrer que X_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(X_n) = S_n$.

5. Pour tout t réel, on pose $f_0(t) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^p$.

5.1. Pour tout entier naturel p, montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5.2. Calculer $I_{p+1} - I_p$ pour tout entier naturel p.

5.3. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.

6. Un encadrement

6.1. Prouver que, pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

6.2. En déduire que : $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall\, t \geqslant 0$, $g_n(t) = 1 - (1 - 2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right)^{n-1}$.

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

8. Soit β un réel strictement positif, montrer que l'on a :

$$\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\beta \ln(2)} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u.$$

9. Démontrer que : $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.

10. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x \mid y >$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E,\ \ \varphi_u(x) = 2\,\frac{< x \mid u >}{< u \mid u >}\,u - x.$$

1. **Étude de l'application φ_u**

   1.1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

   1.2. En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

   1.3. Soit x appartenant à E, calculer $\langle\, \varphi_u(x) \mid \varphi_u(x)\, \rangle$.

   1.4. En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

   $$\forall\,(x, y) \in E^2, \langle\, \varphi_u(x) \mid \varphi_u(y)\, \rangle = < x \mid y > .$$

   1.5. On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.
   Déterminer l'image de D_u par φ_u.
   En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

   1.6. Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2. **Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$**

   Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

   2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.

   2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

   2.3. Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.
   Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. **Étude d'une réciproque**

   Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

   $$\forall\, x \in \Delta,\ \ \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \Delta^{\perp},\ \ \psi(x) = -x.$$

   3.1. Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

   3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Étudier la parité des fonctions I_n .

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout entier naturel n, de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. **Calcul de** $I_n(0)$

5.1. Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

5.2. En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!}$.

Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.

Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction I_n ?

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1138 – D'après documents fournis