

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Pour tout réel x , on rappelle que la partie entière de x , notée $[x]$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leq x < k + 1.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0, 1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y , la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X + 1}{2} \right\rfloor.$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x + 1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit k un entier naturel non nul.
Écrire l'événement $(Y = k)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où j est un entier naturel non nul.
4. Déterminer la loi de Y .

EXERCICE 2

1. Question préliminaire

En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geq 1$.
3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
4. En déduire la valeur de R .

On note alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.

5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n$ où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.
6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où A^\top désigne la transposée de la matrice A .

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.
2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top B Y$ pour un vecteur Y de \mathbb{R}^n .
3. Montrer que l'on a : $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n$.
4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A .
5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de A^\top .
6. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
7. La matrice A est-elle inversible ?
8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.
9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.
Montrer que V est aussi vecteur propre de A^\top .
10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P .
On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

- 10.1. Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
 - 10.2. Vérifier que \mathcal{L} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - 10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$, . Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base \mathcal{L} .
11. Étude des puissances de A

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base \mathcal{L} .

11.1.2. En déduire une expression de A^k .

11.2. Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.

Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$.

EXERCICE 4

Questions préliminaires

1. Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J .
2. Démontrer qu'une fonction k -lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur cet intervalle.

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux bornées sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux à valeurs dans \mathbb{R} et intégrables sur \mathbb{R} .

On rappelle que : $\forall g \in F, \|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt$ et $\forall f \in E, \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E .

Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3. Montrer que la fonction :

$$x \mapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$$

est bien définie sur \mathbb{R} .

4. Démontrer que $f \star g = g \star f$.

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5.1. Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.

5.2. La fonction f_1 est-elle continue sur \mathbb{R} ?

6. Étude de $f_1 \star g$

6.1. Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur \mathbb{R} .

6.2. Si g est k -lipschitzienne sur \mathbb{R} , prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

6.3. Démontrer que pour tout x réel :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u) du.$$

6.4. Si g est continue sur \mathbb{R} , prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

7. Étude de $f_1 \star f_1$

7.1. Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.

7.2. Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x .

7.3. Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.

7.4. La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur \mathbb{R} ?

8. Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.

8.2. Vérifier que l'on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) dx = 1$.

8.3. Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée

9.1. Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$.

9.2. Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ qui à tout h associe $h \star g$ est continu.

9.3. En déduire une majoration de $\|\Phi\|$ (norme subordonnée de Φ).

10. On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ vérifiant } |x| \geq A, f(x) = 0$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

Pour tout réel x , on rappelle que la partie entière de x , notée $[x]$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

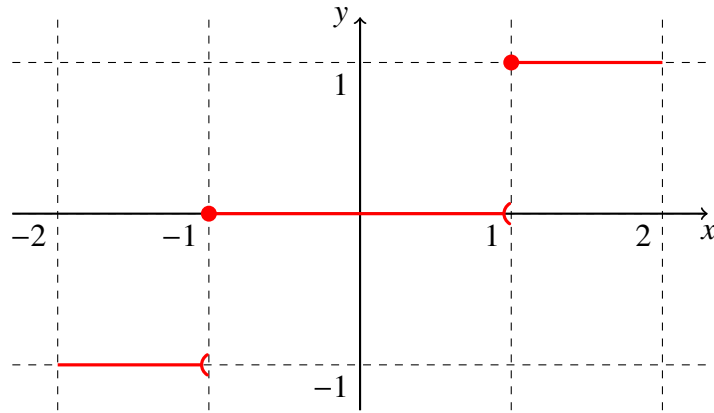
$$k \leq x < k + 1$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0, 1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y , la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$$

1. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.



2. Déterminer $Y(\Omega)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc :

- si $X = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors $\frac{X+1}{2} = m + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $Y = m + 1$.
- si $X = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors $Y = m$.

Ainsi : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

3. Soit k un entier naturel non nul.

Écrire l'événement $(Y = k)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où j est un entier naturel non nul.

$$\text{On a : } (Y = k) = \left(k \leq \frac{X+1}{2} < k+1 \right) = (2k-1 \leq X < 2k+1) = (X = 2k-1) \cup (X = 2k).$$

4. Déterminer la loi de Y .

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(k \leq \frac{X+1}{2} < k+1\right) = \mathbb{P}(2k-1 \leq X \leq 2k) = pq^{2k-2}(1+q) = (1-q^2)(q^2)^{k-1} \text{ où } q = 1-p, \text{ car } (X = 2k-1) \text{ et } (X = 2k) \text{ sont disjoints.}$$

Finalement, Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

EXERCICE 2

1. Question préliminaire

En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Supposons que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. On a $\cos(2n) \rightarrow 0$ donc, par unicité de la limite, on a $0 = -1$. On aboutit à une contradiction donc $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On peut aussi raisonner ainsi : supposons que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ .

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2n) = \ell$ et comme $\cos(2n) = 2 \cos^2(n) - 1$, il vient $\ell = 2\ell^2 - 1$, c'est-à-dire $\ell = 1$

ou $\ell = \frac{1}{2}$: la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ étant égal à 1 (à justifier), on obtient d'après le cours : $R \geq 1$.

3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.

D'après la question 1. $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et donc, la série $\sum_{n \geq 1} \cos(n)$ diverge grossièrement.

4. En déduire la valeur de R .

On en déduit que la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n x^n$ diverge pour $x = 1$. Comme les séries $\sum a_n x^n$ et

$\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence, on a donc que $R \leq 1$.

En conclusion, $R = 1$.

On note alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$

5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n$ où i désigne

le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

Il s'agit d'une série géométrique de raison $e^i x$.

Elle converge si, et seulement si $|e^i x| = |x| < 1$.

On en déduit que le rayon de convergence demandé vaut 1.

Alors, pour tout x tel que $|x| < 1$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n = \frac{1}{1 - e^i x}$

6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, on peut dériver terme à terme et donc,

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n+1) x^n = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)} x^n \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^i}{1 - e^i x} \right).$$

ce qui donne : $\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \frac{\cos(1) - x}{1 - 2 \cos(1) x + x^2}$.

7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

On constate que $\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = -\frac{1}{2} \varphi'(x)$ où $\varphi(x) = \ln(1 - 2 \cos(1) x + x^2)$

Il existe donc une constante C réelle telle que : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = -\frac{1}{2} \varphi(x) + C$.

Comme $f(0) = \varphi(0) = 0$, on obtient que $C = 0$ et ainsi :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2 \cos(1) x + x^2).$$

8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

On écrit $\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\cos(n) + 1}{2}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n = \frac{\cos(n)}{2n} x^n + \frac{x^n}{2n}$.

Comme les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{2n} x^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2n}$ ont le même rayon de convergence 1, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$ a aussi un rayon de convergence qui vaut 1.

De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$.

EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où A^\top désigne la matrice transposée de la matrice A .

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

On remarque que : $B = A(3A^2 - A - I_n) = AA^\top$ et donc, $B^\top = (AA^\top)^\top = AA^\top$, ce qui prouve bien que la matrice B est symétrique réelle.

Il en résulte que la matrice B est diagonalisable sur \mathbb{R} puisque symétrique réelle.

2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.

D'après le théorème spectral, les valeurs propres de B sont réelles.

On suit l'indication de l'énoncé : soit Y un vecteur de \mathbb{R}^n .

$$Y^\top BY = Y^\top A^\top AY = (AY)^\top (AY) = \|AY\|^2.$$

Si Y est un vecteur propre (donc non nul) de B pour une valeur propre λ , on a : $BY = \lambda Y$ et donc, $Y^\top BY = \lambda \|Y\|^2$.

Finalement : $\lambda \|Y\|^2 = \|AY\|^2$, ce qui prouve ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3. Montrer que l'on a : $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n$.

Évident d'après les hypothèses de l'énoncé.

4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A .

On en déduit que $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n = 3(3A^2 - A - I_n)^2 - (3A^2 - A - I_n) - I_n$

soit $(3A^2 - A - I_n)^2 - A^2 = O_n$ ou encore $(3A^2 - 2A - I_n)(3A^2 - I_n) = O_n$.

Il en résulte que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A .

5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de A^\top .

Si un polynôme Q annule A , alors par transposition, il annule A^\top .

Comme P annule A , $\frac{1}{9}P$ est unitaire et annule A^\top .

6. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Le polynôme P se décompose de la façon : $P(X) = (X - 1)(3X + 1)(X\sqrt{3} + 1)(X\sqrt{3} - 1)$.

7. La matrice A est-elle inversible ?

0 n'est pas racine de P et donc, la matrice A est inversible.

8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

Puisque le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples : la matrice A est diagonalisable et

$$\text{Sp}(A) \subset \left\{ 1, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}.$$

9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Montrer que V est aussi vecteur propre de A^\top .

On a : $AV = \lambda V$ et par suite, $A^2V = \lambda^2V$.

Ainsi, puisque $A^\top = 3A^2 - A - I_n$, il vient : $A^\top V = 3A^2V - AV - V = (3\lambda^2 - \lambda - 1)V$, ce qui prouve que V est aussi un vecteur propre de A^\top pour la valeur propre $3\lambda^2 - \lambda - 1$.

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P .

On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

10.1. Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Le polynôme L_1 vérifie : $L_1(1) = 1, L_1\left(-\frac{1}{3}\right) = L_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = L_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, ce qui donne,

$$\text{après calculs : } L_1(X) = \frac{\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{9}{8} \left(X - \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

10.2. Vérifier que \mathcal{L} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $(\beta_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ des scalaires tels que : $\sum_{i=1}^4 \beta_i L_i = 0$.

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $\sum_{i=1}^4 \beta_i L_i(\alpha_j) = 0$, soit $\beta_j = 0$ et la famille \mathcal{L} est libre.

Comme son cardinal vaut $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, la famille \mathcal{L} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base \mathcal{L} .

Comme la famille \mathcal{L} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, il existe une unique famille $(\zeta_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ de scalaires

tels que : $R = \sum_{i=1}^4 \zeta_i L_i$.

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on peut écrire : $R(\alpha_j) = \sum_{i=1}^4 \zeta_i L_i(\alpha_j) = \zeta_j$.

On en déduit que $R = \sum_{i=1}^4 R(\alpha_i) L_i$.

11. Étude de A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base \mathcal{L} .

Soient Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P :
 $X^k = QP + R$ avec $R \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\text{On en déduit immédiatement : } \begin{cases} R(1) = 1 \\ R\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ R\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \\ R\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \end{cases}$$

$$\text{et donc, } R = L_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k L_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_4.$$

11.1.2. En déduire une expression de A^k .

Comme $P(A) = O_n$, on en déduit en appliquant à la matrice A :

$$A^k = L_1(A) + \left(-\frac{1}{3}\right)^k L_2(A) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_3(A) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_4(A)$$

11.2. Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.

Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A .

On fait alors tendre k vers l'infini, ce qui donne :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = L_1(A) = \frac{9}{8} \left(A + \frac{1}{3} I_n \right) \left(A - \frac{\sqrt{3}}{3} I_n \right) \left(A + \frac{\sqrt{3}}{3} I_n \right).$$

• Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A - I_n) \oplus \text{Ker}\left(A + \frac{1}{3} I_n\right) \oplus \text{Ker}\left(A - \frac{\sqrt{3}}{3} I_n\right) \oplus \text{Ker}\left(A + \frac{\sqrt{3}}{3} I_n\right)$, la matrice

$L_1(A)$ est la matrice de la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à la somme directe $\text{Ker}\left(A + \frac{1}{3} I_n\right) \oplus$

$\text{Ker}\left(A - \frac{\sqrt{3}}{3} I_n\right) \oplus \text{Ker}\left(A + \frac{\sqrt{3}}{3} I_n\right)$.

• On peut aussi dire que $(L_1(A))^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{2k} = L_1(A)$ puisque la suite $(A^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite convergente $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers $L_1(A)$.

EXERCICE 4

Questions préliminaires

1. Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J .

Soit donc f une fonction f de classe C^1 sur un segment J .

Alors f' est continue sur ce segment et par suite, elle y est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall x \in J, |f'(x)| \leq M$$

Alors, d'après le Théorème des Accroissements Finis, pour tout couple $(x, y) \in J^2$, $\exists c \in J$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ et par suite : $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$, ce qui prouve que f est M -lipschitzienne.

2. Démontrer qu'une fonction k -lipschitzienne sur un intervalle J est uniformément continue sur cet intervalle.

Soient f une fonction k -lipschitzienne sur un intervalle J et ε un réel strictement positif.

En posant $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1}$, on peut écrire : $\forall (x, y) \in J^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq k\eta \leq \varepsilon$

et f est uniformément continue sur J .

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur \mathbb{R} et bornées et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et intégrables sur \mathbb{R} .

On rappelle que : $\forall g \in F, \|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt$ et $\forall f \in E, \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E .

Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3. Montrer que la fonction :

$$x \mapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

est bien définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

On a aussi la majoration : $\forall t \in \mathbb{R}, |f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_{\infty} \cdot |g(t)|$.

Comme g est intégrable sur \mathbb{R} , la fonction $t \mapsto \|f\|_{\infty} \cdot |g(t)|$ est intégrable sur \mathbb{R} .

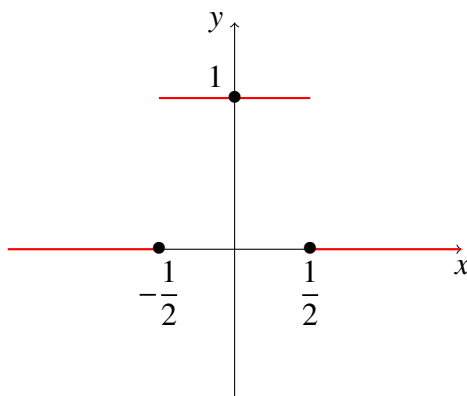
Il en résulte que la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} et par suite, l'existence de $(f \star g)(x)$ pour tout x réel.

4. Démontrer que $f \star g = g \star f$.

Par un changement de variable affine simple $u = x - t$, on vérifie que $f \star g = g \star f$.

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5.1. Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.



5.2. La fonction f_1 est-elle continue sur \mathbb{R} ?

La fonction f_1 n'est pas continue sur \mathbb{R} (discontinuités en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$). Elle est cependant continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Remarquons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) dt = 1$.

6. Étude de $f_1 \star g$

6.1. Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur \mathbb{R} .

Comme $f_1 \in E$ la fonction $f_1 \star g$ existe pour tout x réel.

6.2. Si g est k -lipschitzienne sur \mathbb{R} , prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Soient g une fonction k -lipschitzienne sur \mathbb{R} et x, y deux réels.

$$(f_1 \star g)(y) - (f_1 \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) (g(y-t) - g(x-t)) dt$$

$$\text{Ainsi : } |(f_1 \star g)(y) - (f_1 \star g)(x)| \leq k |y - x| \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)| dt = k |y - x|$$

et la fonction $f_1 \star g$ est k -lipschitzienne sur \mathbb{R} et par suite uniformément continue sur \mathbb{R} .

6.3. Démontrer que pour tout x réel :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u) du$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(x-t) dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u) du.$$

6.4. Si g est continue sur \mathbb{R} , prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

Notons G est une primitive de la fonction continue g sur \mathbb{R} .

$$\text{Alors } (f_1 \star g)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(x-t) dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u) du = G(x+1/2) - G(x-1/2).$$

Comme g est continue sur \mathbb{R} , alors G est de classe C^1 sur \mathbb{R} et il en est donc de même de $f_1 \star g$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f_1 \star g)'(x) = g(x+1/2) - g(x-1/2)$.

7. Étude de $f_1 \star f_1$

7.1. Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.

Comme $f_1 \in E \cap F$, $f_1 \star f_1$ existe.

7.2. Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Soit x un réel. $(f_1 \star f_1)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f_1(x-t)dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} f_1(u)du.$

On considère 4 cas et on note $I_x = \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right]$.

• Si $I_x \subset \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ i.e. $x > 1$, alors $(f_1 \star f_1)(x) = 0$.

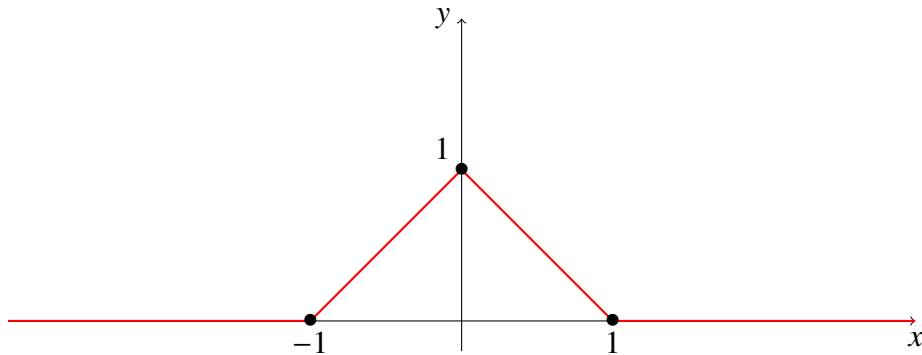
• Si $I_x \subset \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$ i.e. $x < -1$, alors $(f_1 \star f_1)(x) = 0$.

• Si $x - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ i.e. $x \in [-1, 0]$ alors $(f_1 \star f_1)(x) = \int_{-1/2}^{x+1/2} dt = x + 1$.

• Si $-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} < x + \frac{1}{2}$ i.e. $x \in [0, 1]$ alors $(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-1/2}^{1/2} dt = 1 - x$.

On peut remarquer que $f_1 \star f_1$ est continue.

7.3. Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.



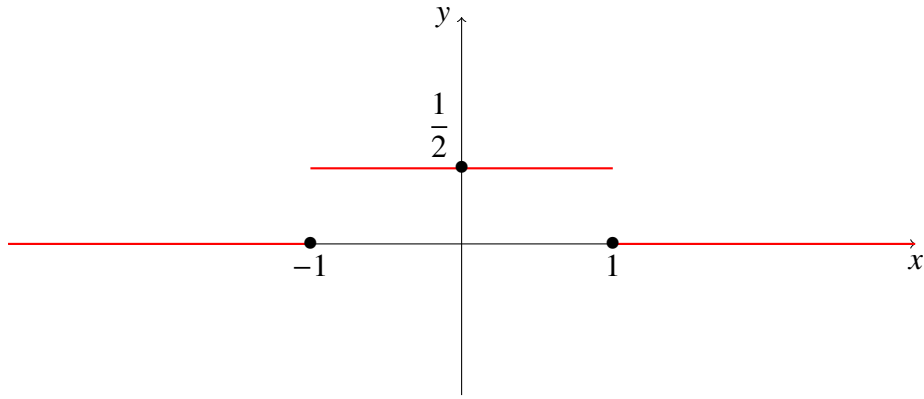
7.4. La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Cf la dernière remarque de la question 7.2.

8. Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.



8.2. Vérifier que l'on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) dx = 1$.

Facilement, on a par le changement de variable affine $t = \frac{x}{\alpha}$:

$$\int_{\mathbb{R}} h_\alpha(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) dt = 1$$

On peut aussi dire que l'aire du rectangle sur le graphe précédent vaut 1 donc l'intégrale recherchée est bien égale à 1.

8.3. Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

$$\text{On a : } (h_\alpha \star g)(x_0) - g(x_0) = \int_{\mathbb{R}} h_\alpha(t) (g(x_0 - t) - g(x_0)) dt.$$

$$\text{Donc } (h_\alpha \star g)(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (g(x_0 - t) - g(x_0)) dt.$$

g étant continue en x_0 , on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |y - x_0| \leq \beta \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $\alpha \in]0, 2\beta[$, en prenant $y = x_0 - t$, on a :

$$|y - x_0| = |t| \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |g(x_0 - t) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

$$\text{D'où } |(h_\alpha \star g)(x_0) - g(x_0)| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Et finalement, on a bien démontré que : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (f_1 \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée

9.1. Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$.

$$\text{On a : } \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |h(x - t)g_1(t)| \leq \|h\|_\infty |g(t)|.$$

Donc en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R}, (h \star g)(x) \leq \|h\|_\infty \|g\|_1$ d'où $\|h \star g\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|g\|_1$.

9.2. Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ qui à tout h associe $h \star g$ est continu.

L'application Φ étant linéaire, l'inégalité de la question précédente prouve sa continuité.

9.3. En déduire une majoration de $\|\Phi\|$ (norme subordonnée de Φ).

Toujours la même inégalité donne $\|\Phi\| \leq \|g\|_1$.

10. On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ vérifiant } |x| \geq A, f(x) = 0$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, (f \star g)(x) = \int_{x-A}^{x+A} f(x-t)g(t)dt.$$

$$\text{Donc } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f \star g)(x) - (f \star g)(y) = \int_{x-A}^{x+A} f(x-t)g(t)dt - \int_{y-A}^{y+A} f(y-t)g(t)dt.$$

D'après la relation de Chasles, Attention, on a du $f(x-t)$ et du $f(y-t)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f \star g)(x) - (f \star g)(y) = \int_{x-A}^{y-A} f(x-t)g(t)dt + \int_{y+A}^{x+A} f(y-t)g(t)dt.$$

Les fonctions f et g étant bornées, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| \leq 2\|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty}|x-y|$.

La fonction $f \star g$ est lipschitzienne, donc uniformément continue sur \mathbb{R} .

* * * * *

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :

- Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examineur) :

les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.

Nous nous interrogeons d'ailleurs sur l'opportunité de mettre des points de présentation.

- Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

- De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent le « le théorème spectrale » etc.

- Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.

- Notons que nous avons de nouveau rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.

- Signalons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre

la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , encore faut-il les vérifier !

- Cette année, nous avons demandé des représentations graphiques de fonctions : nous avons pu constater que beaucoup de candidats n'y attachent pas assez d'importance et souvent les bâclent : elles permettent pourtant d'aider à la compréhension de la notion étudiée et nous sommes très attentifs au soin qu'ils y apportent.

- Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...

- Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.

- Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MP et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.

En exemple, le Théorème du rang appliqué à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ prend parfois des formes étranges : $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A))$ ou encore, $\dim(A) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A))$!

- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :

* Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.

* On trouve encore trop d'équivalents à 0...

- Les quantificateurs, les symboles \implies , \iff sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

- Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $t^{p(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dots$ ne veut pas dire grand chose.

- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abordent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

Nous avons compilé un certain nombre d'erreurs constatées sur les copies qu'il nous semble important de signaler dans ce rapport afin d'espérer ne plus les rencontrer l'an prochain.

• Exercice 1.

Thème de l'exercice : Étude de la variable aléatoire $\left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$ connaissant la loi de la variable aléatoire X .

- La partie entière d'un nombre négatif pose beaucoup de problèmes bien que l'énoncé redonne la définition de la partie entière d'un nombre réel.
- Dans beaucoup de copies, la représentation graphique est donnée sans aucune justification.
- La réponse à la question **2.** est souvent erronée par méconnaissance de $X(\Omega)$.
- Il est étonnant de trouver des réponses telles que $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$!
- Trop peu de candidats réalisent que la question **3.** donne la réponse à la question **2.** . Par exemple, on a lu $Y(\Omega) \in [0, 1]$ comme réponse à la question **2.** pour enchaîner sur l'événement $(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ dans la question **3.** !
- On remarque une confusion entre événement et probabilité, des \iff entre événements, des réunions de probabilités.
Enfin, quasiment aucun des candidats n'a reconnu la loi de la variable aléatoire Y parmi les rares qui l'ont déterminée.

• Exercice 2.

Thème de l'exercice : Calcul du rayon et de la somme d'une série entière.

- **Q.1.** : Beaucoup d'étudiants ont lu trop rapidement la question préliminaire : il n'est pas demandé de prouver que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.
Nous insistons encore une fois sur la nécessité de lire attentivement l'énoncé.
Des candidats ont pensé utiliser des suites extraites de la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ pour résoudre la question.
Attention : $(\cos(n/2))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de $\cos(n)$, pas plus que $(\cos(2\pi n))_{n \in \mathbb{N}}$...
- **Q.2.** : Il manque très souvent les valeurs absolues pour majorer a_n .
La règle de d'Alembert apparaît trop souvent avec des majorations incongrues ou des limites qui n'existent pas.
Il est très rare de voir $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ et les conséquences qui en découlent.
- **Q.3.** : En général bien traitée.
- **Q.4.** : Le fait que les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ sont égaux est rarement mentionné et par suite la justification de $R \leq 1$ est rarement rigoureuse.

- **Q.5.** : On remarque une utilisation quasi générale du critère de d'Alembert sans mentionner de limite ou avec des résultats étonnants du type $R = \frac{1}{e^i}$.
En général, le calcul de la somme est correct.
- **Q.6.** : Encore une fois, nombre de candidats ne lisent pas correctement la question et ne déterminent pas une expression simple de $f'(x)$.
Ils se contentent souvent de dériver la série entière terme à terme.
- **Q.7.** : Les candidats qui ont abordé cette question arrivent sans trop de problème jusqu'à la partie réelle de $\frac{e^i}{1 - e^i x}$ mais rencontrent énormément de difficultés pour la déterminer.
- **Q.8.** : Assez rarement abordée. En général les étudiants se bornent à la détermination du rayon de convergence de cette série entière.

• Exercice 3.

Thème de l'exercice : Étude des propriétés d'une matrice définie par la relation : $A^\top = 3A^2 - A - I_n$.

- **Q.1.** : La plupart des candidats trouvent que $B = AA^\top$ et affirment que la matrice AA^\top est symétrique sans aucune démonstration.
- **Q.2.** : Beaucoup de candidats ne traitent que la positivité (avec des arguments plus ou moins fantaisistes) en oubliant de justifier que les valeurs propres sont réelles.
Cette question classique a été rarement complètement traitée.
- **Q.4.** : Tentative d'arnaque qui consiste à affirmer (correctement mais sans la moindre justification) que $(A^\top)^2 = A^2$ pour conclure directement.
- **Q.5.** : Le mot unitaire semble gêner de nombreux candidats.
Les propriétés de la transposition sont parfois très floues, ce qui rend cette question difficile.
- **Q.6.** : Certains étudiants remarquent l'identité remarquable, mais ne factorisent pas (ou ne savent pas factoriser) les polynômes du second degré.
D'autres n'hésitent pas à développer pour tenter de trouver des racines évidentes !
C'est cette question qui a donné lieu aux plus grosses énormités de calculs.
- **Q.9.** : Trop de candidats transposent la relation $AV = \lambda V$ et tentent vainement d'obtenir le résultat.
- **Q.10. et Q.11.** : Notons que ces deux dernières questions ont en général été bien traitées par ceux qui les ont abordées.

Quelques remarques cependant :

- * Même si la définition des polynômes de Lagrange était donnée, on a pu voir quelques résultats étonnants obtenus à cette question : des polynômes échelonnés en degré, du premier degré, etc.
- * Une erreur récurrente : les polynômes de Lagrange sont premiers entre eux et donc ils forment une famille libre.
- * Souvent, il y a confusion entre cardinal et dimension.

• Exercice 4.

Thème de l'exercice : Étude de la convolution de deux fonctions à travers des exemples simples.

- **Q.1.** : C'est une question de cours qui pose beaucoup de soucis à nombre de candidats.
Le terme C^1 semble souvent mystérieux (continue et dérivable ?).

Pour obtenir une inégalité, la limite du taux d'accroissement devient majorée, le théorème des accroissements finis semble souvent ignoré.

Le fait que J soit compact ne semble pas avoir été compris.

- **Q.2.** : Rappelons qu'il est important de bien lire l'énoncé : dans cette question, l'intervalle n'était pas un segment et il était inutile de tenter d'utiliser le théorème de Heine.
- **Q.3.** : Cette question a été très souvent massacrée, la domination étant pour beaucoup une majoration.

Beaucoup de candidats semblent ne pas trop savoir ce que signifie le mot « définie » lorsqu'on leur demande de prouver que $g \star f$ est définie.

Trop de copies majorent la valeur absolue de l'intégrale et non la fonction à intégrer.

Pour d'autres, puisque l'intégrande est défini, l'intégrale est elle aussi définie !

Certains encore tentent sans grand succès d'utiliser un théorème de continuité...

Enfin, le caractère « continue par morceaux » est rarement évoqué.

- **Q.4.** : Alors qu'un changement de variable affine $u = x - t$ conduit au résultat, on lit des arguments comme la commutativité dans \mathbb{R} , etc.
- **Q.5.1.** : Beaucoup d'étudiants dessinent une fonction en créneau comme en physique, et ils en déduisent à la question **5.2.** que la fonction est continue...ce que l'on voit beaucoup trop souvent...
- **Q.6.** : La question **3.** étant rarement invoquée, il s'ensuit des démonstrations longues, redondantes et maladroitement, sans compter ceux qui utilisent la même fausse méthode qu'à la question **3.**
- **Q.7.** : Le fait de ne pas utiliser la question **6.** et le manque de soin conduisent à la non résolution de cette question facile.
- **Q.8.** : Beaucoup d'étudiants sont pénalisés sur les questions **8.1.** et **8.2.** par manque de soin. La question **Q.8.3.** est rarement abordée.
- **Q.9.** : En général bien réussie par les candidats qui avaient lu le sujet en entier et qui connaissaient leur cours sur les espaces vectoriels normés.
- **Q.10.** : Question difficile non traitée.

Luc VALETTE