

Corrigé

Partie I - Quelques aspects liés à la chirurgie réfractive

I.1 - Étude préliminaire : étude optique de l'œil

Q1. Exemple de réponse :

Œil	Appareil photographique
Cornée - cristallin	objectif
rétine	capteur ccd
pupille	diaphragme

Q2. La distance focale est $f' = 17 \text{ mm}$ d'où la vergence

$$V = \frac{1}{f'} = 59 \delta$$

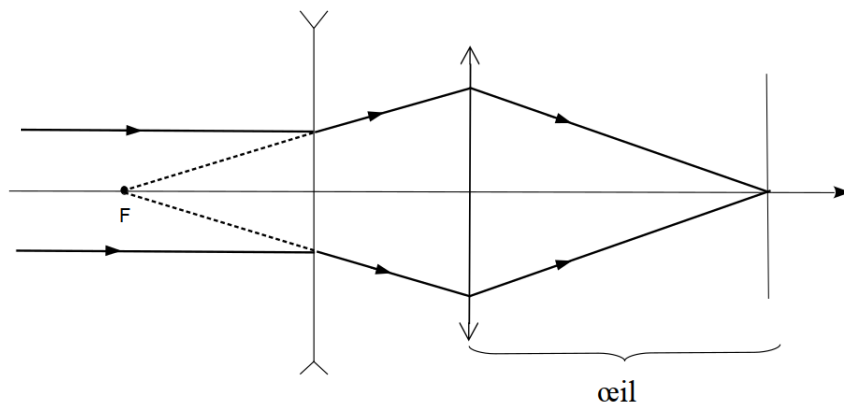
Q3. La vergence doit augmenter. Il faut donc accentuer la courbure du cristallin. Le point le plus proche que l'œil peut voir en accommodant est le punctum proximum. Via la relation de conjugaison :

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = 59 + 4 = 63 \delta$$

Q4. Pour l'œil emmétrope, le punctum remotum est situé à l'infini. Les objets éloignés sont vus de façon nette sans que l'œil accommode. Il faut donc utiliser une lentille pour laquelle l'image d'un point objet à l'infini soit situé à 2,0 m devant l'œil ($\overline{OA'} = -2,0 \text{ m}$).

On a donc :

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = -0,50 \delta$$



Q5. La distance entre deux cellules photoréceptrices est de l'ordre de $d = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = 2 \mu\text{m}$. Le pouvoir

séparateur correspond alors à l'écart angulaire

$$\epsilon = \frac{d}{f'} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,4'$$

- Q6.** Si les points objets sont trop proches, les taches de diffraction correspondantes se chevauchent. L'œil ne distingue alors pas ces objets. La demi-ouverture angulaire induite par la pupille (de

diamètre a) est
$$\theta = 1,2 \frac{\lambda}{a} = 1,2 \cdot \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

Deux points objets sont résolus si leur écart angulaire est plus grand que θ . On constate que la valeur est obtenue est proche de celle imposée par la densité de cônes. Cela montre que cette dernière est optimisée pour correspondre à la limite imposée par la diffraction.

I.2 - Chirurgie LASIK

- Q7.** On a :

- $$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

- $$\vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

- $$\vec{\Pi}(M, t) = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

- Q8.** On utilise le lien entre la puissance du faisceau et la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

D'une part, on a $\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$

et d'autre part $\langle \Pi \rangle = \frac{E_{imp}}{\tau S}$ où $S = \frac{\pi d^2}{4}$ est la section du faisceau au point de focalisation.

On en déduit que

$$E_0 = \sqrt{\frac{8 E_{imp}}{\pi \epsilon_0 c \tau d^2}}.$$

- Q9.** On a

$$E_{at} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Q10.** On trouve

$$E_0 = 1 \cdot 10^{12} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

et

$$E_{at} = 6 \cdot 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

On constate que le champ électrique du laser a une intensité plus élevée que celle du champ électrique créé par le noyau. Il peut donc supposer qu'il est suffisamment intense pour provoquer l'ionisation de l'atome.

Q11. On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron. On obtient $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$. Comme $\vec{j} = -ne\vec{v}$, on obtient en combinant les équations : $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}$.

En notation complexe avec la convention de l'énoncé, $\frac{\partial \underline{j}}{\partial t} = i\omega \underline{j}$.

On trouve donc $\underline{j} = -i \frac{ne^2}{m_e \omega} \underline{E}$ et par identification $\underline{\gamma} = -i \frac{ne^2}{m_e \omega}$

Q12. Équations de Maxwell :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Q13. On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, ce qui conduit à :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{Or } \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \text{ et } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

On obtient donc : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$

Q14.

- Si $\omega > \omega_p$, le vecteur d'onde k est réel. L'onde électromagnétique est une onde plane progressive sinusoïdale qui se propage dans le sens des x positifs.
- Si $\omega < \omega_p$, le vecteur d'onde k est imaginaire pur.

$$\text{On a } k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \pm \frac{i}{\delta} \text{ avec } \delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

La solution en $e^{\frac{x}{\delta}}$ est divergente et n'est pas physiquement pertinente ici. L'expression

du champ électrique est donc $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t)$. On constate que l'onde ne

se propage pas car les dépendances spatiale et temporelle sont découplées. L'amplitude de l'onde décroît exponentiellement selon x .

Q15. La surface S du capot cornéen est de l'ordre du cm^2 . Prenons $S = 1 \text{ cm}^2$. La surface découpée par une impulsion est $s = 1 \mu\text{m}^2$. Le nombre d'impulsions nécessaires N par œil est donné par $N = \frac{S}{s} = 10^8$. En notant Δt la durée de la découpe d'un volet et T la période des impulsions,

on a $\Delta t = NT$ soit $f = \frac{N}{\Delta t} = 1 \cdot 10^7 \text{ Hz}$

Q16. On considère un volume sphérique de rayon R de matière. L'énergie de l'impulsion vaporise l'eau et la dissocie en dihydrogène et dioxygène. Le processus est supposé adiabatique. Le bilan d'énergie conduit à : $E_{imp} = mL_{vap} - \frac{m}{M}\Delta_f H^0(H_2O_{(g)})$ avec $m = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$

d'où $R = \left(\frac{3E_{imp}}{4\pi\rho(L_{vap} - \frac{\Delta_f H^0(H_2O_{(g)})}{M})} \right)^{\frac{1}{3}}$

Soit $R = \left(\frac{12 \cdot 10^{-6}}{4\pi 10^3 (2,0 \cdot 10^6 + \frac{2,410^5}{18 \cdot 10^{-3}})} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{1 \cdot 10^{-9}}{1,5 \cdot 10^7} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

On trouve que l'impulsion laser génère une bulle de gaz dont le rayon est de l'ordre du micromètre, ce qui correspond à l'ordre de grandeur donné par l'énoncé.

I.3 - Mesure de l'épaisseur de la cornée

Q17. Expression du coefficient de compressibilité adiabatique : $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p}$

Soit $\mu = \rho_0 \chi_s p$

Q18. On considère une particule fluide de volume $\delta\tau$. Elle soumise aux efforts de pression dont l'expression est $-\overrightarrow{\text{grad}} P \delta\tau$. L'application de la seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à

$$\mu \delta\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \delta\tau \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \delta\tau (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P \delta\tau$$

Soit à l'ordre 1, $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

Q19. Équation locale de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

Soit à l'ordre 1, $\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}$

Q20. On a d'une part $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ soit en dérivant par rapport à x : $\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

D'autre part $\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ soit en dérivant par rapport à t : $\chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$

Comme $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$ (théorème de Schwarz), on obtient

$$\rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

C'est l'équation d'onde de d'Alembert. La célérité associée est

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \frac{1}{\sqrt{36 \cdot 10^{-8}}} = 1,7 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q21. Expression de l'impédance acoustique : $Z = \frac{p}{v}$

Pour une onde progressive, $p(x,t) = f(x-ct)$. On a donc $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ qui conduit à $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -f'$

où f' est la dérivée de f . Après intégration, $v = \frac{1}{c\rho_0} f + K(x)$

Le terme $K(x)$ ne dépendant que de x n'est pas associé à la propagation d'une onde ce qui

impose $K(x)=0$. On trouve finalement : $v = \frac{1}{c\rho_0} p$ soit

$$Z = c\rho_0$$

Pour une onde régressive, $p(x,t) = g(x+ct)$. On obtient de la même façon

$$Z = -c\rho_0$$

Q22. Continuité de la vitesse : $v_i(t) + v_r(t) = v_t(t)$ en $x = 0$.

Continuité de la pression : $p_i(t) + p_r(t) = p_t(t)$ en $x = 0$. Soit $Z_1 v_i(t) - Z_1 v_r(t) = Z_2 v_t(t)$

On obtient alors : $r = \frac{v_r}{v_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ ainsi que $t = \frac{v_t}{v_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

La fraction R de la puissance acoustique incidente réfléchiée sur l'interface correspond à

$$R = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Q23. Une partie du signal acoustique est réfléchiée sur l'interface milieu (extérieur - cornée) et ainsi que sur l'interface (cornée - humeur aqueuse). La mesure du temps séparant la détection de ces deux ondes réfléchiées permet de remonter à l'épaisseur de la cornée.

Partie II - Quelques aspects relatifs au système vasculaire

II.1 - Modélisation du cœur

Q24. On a
$$D = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{75 \cdot 10^{-6} \cdot 70}{60} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Or $D = vS$ et donc
$$v = \frac{D}{S} = \frac{9 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q25. On utilise le premier principe de la thermodynamique appliqué aux systèmes ouverts :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w$$

L'évolution étant supposée adiabatique, le transfert thermique massique q est nul.

Comme $h = u + \frac{P}{\rho}$ et $\Delta u = 0$, on trouve $w = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2)$

La puissance mécanique produite par le cœur est :

$$P = \rho D w = D \left(\Delta P + \frac{1}{2} \rho (v_s^2 - v_e^2) \right) = 9 \cdot 10^{-5} \cdot (10^4 + 0,5 \cdot 1,1 \cdot 10^3 \cdot 11,2 \cdot 10^{-2}) = 0,9 \text{ W}$$

II.2 - Écoulement sanguin

Q26. L'écoulement est laminaire si le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\rho v R}{\eta}$ est inférieur à $2 \cdot 10^3$.

Q27. Le fluide étant incompressible, la conservation de la masse se traduit par $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ce qui impose $v(r, \theta, x) = v(r, \theta)$. On a également invariance par rotation autour de l'axe Ox , ce qui impose : $v(r, \theta) = v(r)$.

La vitesse au niveau de la paroi est nulle.

Q28. On considère un cylindre de rayon r de longueur L et d'axe Ox . L'effet des frottements visqueux se traduit par la force : $\vec{F}_{vis} = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_x$

Le fluide à l'extérieur s'écoule plus lentement que le fluide dans le cylindre de rayon r et donc $\frac{dv}{dr} \leq 0$. Dit autrement les frottements visqueux freinent l'écoulement dans le cylindre.

Q29. On a
$$\vec{F} = \pi r^2 (P_1 - P_2) \vec{u}_x$$

Q30. En régime stationnaire, la résultante des forces est nulle.

On obtient donc : $2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = -\pi r^2 (P_1 - P_2)$. Soit $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r$ comme demandé.

Après intégration, $v = K - \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2$ où K est une constante d'intégration à déterminer avec

les conditions limites. On a vu que $v(R) = 0$, ce qui conduit à

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

Q31. Le débit volumique du fluide D_v est donnée par :

$$D_v = \iint v dS = \int_0^R 2\pi r v dr = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

Soit $D_v = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L} \left(\frac{1}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^4 \right) = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8\eta L} R^4$

La vitesse moyenne v_m vérifie : $D_v = v_m \pi R^2$ et donc

$$v_m = \frac{(P_1 - P_2)}{8\eta L} R^2$$

Q32. Avec les données fournies :

$$R_e = \frac{\rho(P_1 - P_2)}{8\eta^2 L} R^3 = \frac{10^7}{8 \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot 10^{-6}} \cdot 125 \cdot 10^{-18} = 10^{-3}$$

Q33. On suppose que les N vaisseaux capillaires sont placés en dérivation. Le sang étant incompressible, le débit volumique est constant, ce qui impose $D_v = N\pi R^2 v_{cap}$ où R est le rayon d'un capillaire et v_c la vitesse du sang dans un capillaire.

On trouve : $N = \frac{D_v}{\pi R^2 v_{cap}} = \frac{9 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 25 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 1 \cdot 10^9$

Partie III - Étude d'un matériau biocompatible

III.1 - Propriétés du titane

Q34. La titane appartient à la quatrième ligne et à la quatrième colonne du tableau périodique. Il appartient au bloc d (élément de transition).

Q35. La maille contient deux atomes en propre. La masse volumique est donnée par : $\rho = \frac{2m_{Ti}}{V}$.

On a $m_{Ti} = \frac{M_{Ti}}{N_A}$. D'autre part $V = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} c$

Il reste à déterminer la valeur de V.

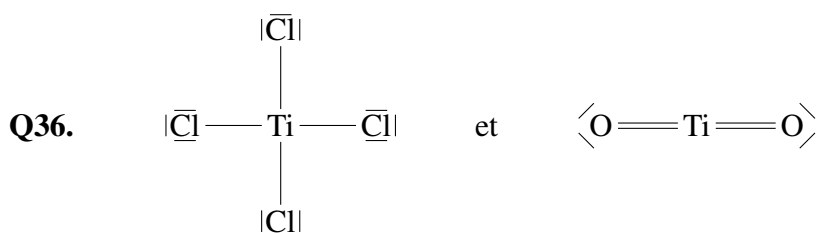
La longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{\sqrt{3}}{2} a$

En utilisant le fait que $a = 2R$: $V = \sqrt{2}a^3 = 8\sqrt{2}R^3$

Et donc

$$\rho = \frac{2M_{Ti}}{8\sqrt{2}R^3N_A} = \frac{2 \cdot 48 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 1,4 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 1,5^3 10^{-30}} = \frac{2 \cdot 10^4}{1,4 \cdot 3,3} = 4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

III.2 - Production du titane



Q37. On a $\Delta_f H^0(\text{C}_{(s)}) = \Delta_f H^0(\text{Cl}_{2(g)}) = 0$ car ce sont des corps purs simples dans leur état standard de référence.

On trouve via la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{TiCl}_{4(g)}) + 2\Delta_f H^0(\text{CO}_{(g)}) - \Delta_f H^0(\text{TiO}_{2(s)}) = -763 - 220 + 945 = -38 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

ainsi que :

$$\Delta_r S^0 = S_m^0(\text{TiCl}_{4(g)}) + 2S_m^0(\text{CO}_{(g)}) - S_m^0(\text{TiO}_{2(s)}) - 2S_m^0(\text{C}_{(s)}) - 2S_m^0(\text{Cl}_{2(g)})$$

Soit

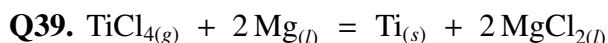
$$\Delta_r S^0 = 355 + 2 \cdot 198 - 50 - 12 - 446 = 243 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Le fait que $\Delta_r H^0 \leq 0$ indique la réaction est exothermique.

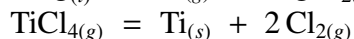
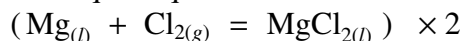
La quantité de matière de gaz augmente au cours la réaction, on s'attend bien donc à ce que $\Delta_r S^0 \geq 0$.

Q38. Une augmentation de température induit un déplacement de l'équilibre dans le sens endothermique (principe de modération), ce qui correspond ici au sens indirect. Une diminution de température déplace l'équilibre dans le sens direct.

Toujours d'après le principe de modération, une augmentation (resp. diminution) de la pression induit un déplacement de l'équilibre dans le sens de la consommation de gaz, c'est à dire dans le sens indirect (resp. direct) ici.



Q40. On détermine l'expression de l'enthalpie libre standard de réaction correspondante en remarquant que cette réaction est la combinaison linéaire des deux réactions suivantes :



On en déduit avec les données fournies que $\Delta_r G^0 = -453 - 0,28 T$ (en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$)

La réaction est thermodynamiquement favorisée si $K \geq 1$ soit si $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 \leq 0$

Avec ici $\Delta_r H^0 = -453 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\Delta_r S^0 = 0,28 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, on trouve que $\Delta_r G^0 \leq 0$ quelque soit la température. Il n'est pas nécessaire de poser de contrainte sur T pour la réaction soit thermodynamiquement possible. On a $Q = 10$ et $K = e^{90} \gg Q$. Le système évolue dans le sens direct.

III.3 - Stabilité du titane

Q41.

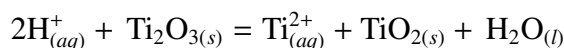
Espèce chimique	$\text{TiO}_{2(s)}$	$\text{Ti}_2\text{O}_{3(s)}$	$\text{Ti}_{(aq)}^{2+}$	$\text{TiO}_{(s)}$	$\text{Ti}_{(s)}$
Nombre d'oxydation du titane	IV	III	II	II	0

Q42.

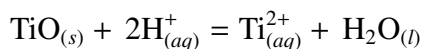
A	B	C	D	E
$\text{Ti}_{(s)}$	$\text{Ti}_{(aq)}^{2+}$	$\text{TiO}_{2(s)}$	$\text{TiO}_{(s)}$	$\text{Ti}_2\text{O}_{3(s)}$

Q43. Le titane métallique et l'eau ont des domaines disjoints. Le titane n'est donc pas stable dans l'eau. Le métal est passivé quand il se recouvre d'une couche d'oxyde. On constate sur le diagramme que cela est le cas quelque soit la valeur du pH.

Q44. L'espèce qui se dismute en milieu acide est $\text{Ti}_2\text{O}_{3(s)}$:



Q45. On considère la réaction :



Via la loi d'action de masse : $K = \frac{CC^0}{[H^+]^2}$

soit $\text{pH}_1 = \frac{1}{2}(\log K - \log \frac{C}{C^0}) = 7,0$