Rapport du jury - 2025 - MP

Énoncé et corrigé

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, par :

$$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(X) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

On cherche les extrema éventuels de la fonction f sous la contrainte : $H = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 2\}$ et les points où ces extrema sont atteints.

Première méthode

1. Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.
2. Déterminer les solutions du problème posé.

Deuxième méthode

Soit $g : X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

3. En utilisant la fonction g , déterminer les extrema possibles de f restreinte à H .
4. Retrouver les solutions du problème posé.

Troisième méthode

Soit $F = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner la dimension.
6. Déterminer le sous-espace orthogonal du sous-espace F .
7. Calculer la distance $d(Y, F)$ entre Y et le sous-espace vectoriel F .
8. Soit $X \in \mathbb{R}^4$. Justifier que : $X \in H \iff X + Y \in F$.
9. En déduire la structure de l'ensemble H .
10. Retrouver de nouveau les solutions du problème posé.

Correction EXERCICE 1

Première méthode

1. La fonction h étant polynomiale, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.

On a facilement : $\frac{\partial h}{\partial u}(X) = 4u - 4$, $\frac{\partial h}{\partial v}(X) = 2v$ et $\frac{\partial h}{\partial w}(X) = 2w$ et donc le seul point critique est le point $(1, 0, 0)$.

Il vient ensuite : $h(u, v, w) = 2(u - 1)^2 + v^2 + w^2 + 2 \geq 2 = h(1, 0, 0)$.

On en déduit que la fonction h admet un minimum qui vaut 2 au point $(1, 0, 0)$

2. La fonction f étant polynomiale, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^4$.

Soit $X = (x, y, z, t) \in H$. Alors, $y = 2 - x$ et $f(x, y, z, t) = h(x, z, t)$.

En utilisant alors la question précédente, on en déduit que $f(X) \geq 2$ avec égalité si, et seulement si :

$X = (1, 1, 0, 0)$, c'est-à-dire que f possède un minimum global qui vaut 2 au point $(1, 1, 0, 0)$

Deuxième méthode

3. L'ensemble des zéros de la fonction g est H .

D'après le théorème d'optimisation sous contrainte, si f , restreinte à H , admet un extremum en $X = (x, y, z, t)$, alors $\nabla f(X)$ est colinéaire à $\nabla g(X)$, c'est-à-dire ici : $(2x, 2y, 2z, 2t)$ est colinéaire à $(1, 1, 0, 0)$ ou encore, $z = t = 0$ et $x = y$.

Or, $X = (x, y, z, t) \in H$ et donc si f possède un extremum local en X , alors $x + y = 2$ et par suite, $x = y = 1$

c'est-à-dire $X = (1, 1, 0, 0) = A$

4. Réciproquement, soit maintenant $X = (x, y, z, t) \in H$.

$f(X) - f(A) = x^2 + (2-x)^2 + z^2 + t^2 - 2 = 2(x-1)^2 + z^2 + t^2 \geq 0$ et ainsi,

f admet un minimum global égal à 2 et atteint en A

Troisième méthode

Soit $F = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, donc sous-espace vectoriel de dimension 3.

6. Facilement, $F^\perp = \text{Vect}(Z)$ où $Z = (1, 1, 0, 0)$

7. D'après le cours, $d(Y, F) = \frac{|\langle Y|Z \rangle|}{\|Z\|} = \sqrt{2}$

8. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

On a : $X \in H \iff x + y = 2 \iff (x-1) + (y-1) = 0 \iff X + Y \in F$

9. On en déduit que H est un sous-espace affine, de direction F : $H = Y + F$

10. On a : $\{f(X), X \in H\} = \{\|X\|^2, X \in H\} = \{\|X + Y - Y\|^2, X \in H\} = \{\|Z - Y\|^2, Z \in F\}$.

Ainsi, pour tout $X \in H$, on a : $f(X) \geq d(Y, F)^2 = 2$ avec égalité si, et seulement si $X + Y$ est le projeté orthogonal de Y sur F , c'est-à-dire si $X = \sqrt{2} \frac{(1, 1, 0, 0)}{\|(1, 1, 0, 0)\|} = (1, 1, 0, 0)$.

On retrouve donc que f possède un minimum global égal à 2 et atteint en $A = (1, 1, 0, 0)$.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On note $E_{n-1} = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1})$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_k(X) = X^k$, la base canonique de E_{n-1} .

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note φ_α l'endomorphisme de E_{n-1} qui à tout polynôme P , associe :

$$\varphi_\alpha(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} P(\alpha^q) X^q$$

On notera A_α la matrice de l'endomorphisme φ_α dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E_{n-1} .

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On rappelle que $\omega^n = 1$ et que $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \frac{1}{\omega}$.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier relatif m , la somme : $\sigma_m = \sum_{r=1}^n \omega^{m(r-1)}$.

Soit $A_\omega = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ la matrice associée à l'endomorphisme φ_ω .

2. Écrire la matrice A_ω dans le cas où $n = 3$. On utilisera le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. Démontrer que, pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

4. La matrice A_ω est-elle symétrique ? Peut-on affirmer qu'elle est diagonalisable ?

5. Calculer $A_\omega \times A_{\bar{\omega}}$. En déduire que A_ω est inversible et déterminer son inverse.

6. Déterminer alors un nombre complexe α tel que : $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\alpha$.

7. Calculer $(A_\omega)^2$ puis vérifier que $(A_\omega)^4 = I_n$.

8. La matrice A_ω est-elle diagonalisable ?

Éléments propres de φ_ω

On note, pour $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q}$. En particulier, $L_0(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

9. Déterminer les valeurs propres possibles de φ_ω .

10. Exprimer les n racines du polynôme $X^n - 1$ à l'aide de puissances de ω .

11. En déduire que : $\forall q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, L_q \in E_{n-1}$.

On pose $H_0 = \text{Vect}(Q_0, L_0)$ et on admet que (Q_0, L_0) en est une base.

12. Vérifier que H_0 est stable par φ_ω .

13. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par φ_ω sur H_0 dans la base (Q_0, L_0) .

14. En déduire :

— un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$,

— un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.

15. Dans le cas $n = 3$, déterminer le spectre de A_ω .

16. Dans le cas $n = 4$, déterminer les valeurs propres de A_ω .

17. Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est de dimension 4 et est stable par φ_ω .

19. Déterminer enfin, pour $n \geq 5$, le spectre de φ_ω .

Correction EXERCICE 2

1. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison ω^m .

Ainsi :

— si $m \equiv 0 [n]$, alors $\sigma_m = n$.

— sinon, $\sigma_m = \sum_{r=0}^{n-1} (\omega^m)^r = \frac{(\omega^m)^n - 1}{\omega^m - 1} = 0$ puisque $\omega^n = 1$.

2. $A_j = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

3. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors $\varphi_\omega(X^k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{kq} X^q$.

Ainsi, $\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$ puis $A_\omega = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$.

4. Facilement, pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{\ell k} = a_{k\ell}$ et la matrice A_ω est symétrique.

Comme elle est à coefficients complexes, on ne peut affirmer à cette étape qu'elle est diagonalisable.

5. Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Comme ω est une racine n -ième de l'unité, $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$.

Donc $(A_\omega \times A_{\bar{\omega}})_{k,l} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \omega^{(k-1)(q-1)} \bar{\omega}^{(q-1)(l-1)} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \omega^{(q-1)(k-l)}$.

Ainsi :

— si $k \neq l, (A_\omega \times A_{\bar{\omega}})_{k,l} = 0$

— si $k = l, (A_\omega \times A_{\bar{\omega}})_{k,l} = 1$.

Il en résulte que $A_\omega \times A_{\bar{\omega}} = I_n$ et donc :

$A_\omega \text{ est inversible et } [A_\omega]^{-1} = A_{\bar{\omega}}$

6. D'après la question précédente,

$\varphi_\omega^{-1} = \varphi_{\bar{\omega}}$

Ainsi, si $Q = \varphi_\omega(P)$, alors $P(X) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} Q(\omega^{-k}) X^k$ (formule de réciprocity de Fourier)

7. Notons $[A(\omega)]^2 = (\alpha_{k,l})$.

$$\text{Alors } \alpha_{k,l} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \omega^{(k-1)(q-1)} \omega^{(l-1)(q-1)} = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{(k+l-2)q}.$$

Ce qui prouve que :

— si $k + l \equiv 2 [n]$, $\alpha_{k,l} = 1$

— sinon, $\alpha_{k,l} = 0$.

On en déduit ensuite immédiatement que $[A(\omega)]^4 = I_n$ en élevant de nouveau au carré.

8. Ainsi, le polynôme $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i)$ est annulateur de A_ω .

Il est scindé dans $\mathbb{C}$, à racines simples : la matrice A_ω est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9. D'après la question précédente, les valeurs propres de φ_ω sont dans l'ensemble $\{-1, 1, -i, i\}$.

10. Les racines du polynôme $X^n - 1$ sont les racines n -ièmes de l'unité, i.e. les ω^p avec $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

11. Pour tout $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ω^q est racine de $X^n - 1$, donc $X - \omega^q$ divise $X^n - 1$. Ainsi, $L_q \in E_{n-1}$

12. On a : $\varphi_\omega(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0$.

Puis, pour tout $q \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $L_0(\omega^q) = 0$, donc $\varphi_\omega(L_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0(1) = \sqrt{n} Q_0$.

Conclusion : $H_0 = \text{Vect}(Q_0, L_0)$ est stable par φ_ω

13. D'après la question précédente, la matrice de la restriction de φ_ω à H_0 dans la base $Q_0 L_0$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix}$$

14. Il en résulte immédiatement que l'on a :

— $L_0 + \sqrt{n} Q_0 \in \text{Ker}(\varphi_\omega - \text{Id}_{E_n})$

— $L_0 - \sqrt{n} Q_0 \in \text{Ker}(\varphi_\omega + \text{Id}_{E_n})$.

15. Cas $n = 3$.

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

On sait déjà d'après la question précédente que 1 et -1 sont valeurs propres de A_j .

Comme $\text{tr}(A_j) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2j) = i$, la troisième valeur propre est i .

D'où $\text{Sp}(A_j) = \{-1, 1, i\}$ et $\text{Ker}(\varphi_\omega - i \cdot \text{id}_{E_2}) = \text{Vect}(Q_1 - Q_2)$.

16. Cas $n = 4$.

Dans ce cas, $A_\omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

On sait toujours que 1 et -1 sont valeurs propres de A_ω .

On a : $\text{tr}(A_\omega) = 1 + i$. Comme les seules valeurs propres possibles sont 1, -1, i et -i, les deux autres valeurs propres sont 1 et i.

D'où $\text{Sp}(A_\omega) = \{-1, 1, i\}$ et $\text{Ker}(\varphi_\omega - i \text{id}_{E_3}) = \text{Vect}(Q_1 - Q_3)$.

On peut retrouver ces résultats en calculant effectivement le polynôme caractéristique de A_ω : notons $C = 2A_\omega$.

Alors $\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & X-i & 1 & i \\ -1 & 1 & X-1 & 1 \\ -1 & i & 1 & X-1 \end{vmatrix}$

En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, on obtient :

$\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & X-i & 1 & i \\ 0 & 1+i-X & X-2 & 1-i \\ 0 & 2i-X & 0 & X-2i \end{vmatrix}$

En effectuant alors $C_2 \leftarrow C_2 + C_4$, on obtient :

$\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & X & 1 & i \\ 0 & 2-X & X-2 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & X-2i \end{vmatrix} = (X-2i) \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -1 \\ -1 & X & 1 \\ 0 & 2-X & X-2 \end{vmatrix}$

En effectuant enfin $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ il vient :

$\chi_C(X) = (X-2i) \begin{vmatrix} X-1 & -3 & -1 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-i)(X-2)(X^2-1-3) = (X-2i)(X-2)(X-2)(X+2)$.

Enfin, les valeurs propres de A_ω sont donc : 1 d'ordre 2, -1 d'ordre 1 et i d'ordre 1

17. Cas $n \geq 5$.

Par la même méthode qu'au-dessus, on obtient les valeurs propres de A_ω dans le cas $n = 5$: $\{1, -1, i, -i\}$

18. Prouvons que la famille $(e_1, e_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est libre :

Soient (a, b, c, d) des complexes tels que $ae_0 + be_{n-1} + cL_1 + dL_{n-1} = 0$.

Comme $L_{n-1} = \overline{L_1}$, en écrivant que les coefficients d'ordre 0 et $n-2$ sont nuls, on trouve : $\begin{cases} a\overline{\omega} + b\omega = 0 \\ a\omega + b\overline{\omega} = 0 \end{cases}$

et comme $\omega^4 \neq 1$, la famille est bien libre.

C'est donc une base de G et $\dim(G) = 4$

- $\varphi_\omega(Q_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} (\omega X)^q.$

Or : $L_{n-1} = \frac{1}{\omega^{n-1}} \frac{X^n - 1}{\omega X - 1} = \frac{1}{\omega^{n-1}} \frac{(\omega X)^n - 1}{\omega X - 1} = \frac{1}{\omega^{n-1}} \sum_{q=0}^{n-1} (\omega X)^q$

et donc, $\varphi_\omega(Q_1) = \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} L_{n-1}.$

- De la même façon, on trouve que : $\varphi_\omega(Q_{n-1}) = \frac{\omega}{\sqrt{n}} L_1, \varphi_\omega(L_1) = \frac{\sqrt{n}}{\omega} Q_1$ et $\varphi_\omega(L_{n-1}) = \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} Q_{n-1}.$

Ainsi, G est stable par φ_ω

19. La matrice de la restriction de F_ω à G dans la base $(e_1, e_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui admet exactement pour valeurs propres $\{1, -1, i, -i\}.$

Ainsi, lorsque $n \geq 5$, en utilisant la question 9., le spectre de φ_ω est $\{-1, 1, -i, i\}$

EXERCICE 3

Question de cours

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}.$

3. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}.$

4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}.$

5. Prouver que pour tout réel positif $x, f'(x) \leq e^x.$

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y).$ Prouver que l'on a : $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|.$

7. Prouver que l'on a : $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

On pose, pour tout $x > 0, g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} dt.$

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.
10. Montrer que : $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.
11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.
12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$.
14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

Correction : EXERCICE 3

1. Pour tout réel x , $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. Soit x un réel.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \left| \frac{x^n}{(n!)^2} \right| = \frac{|x|^n}{(n!)^2} \leq \frac{|x|^n}{n!}$ qui est le terme générique de la série exponentielle.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ est convergente sur $\mathbb{R}$ tout entier et f est définie sur $\mathbb{R}$

On peut aussi dire que $\frac{1}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right)$. Il en résulte que la série entière qui définit f a un rayon de convergence infini et on retrouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. f est développable en série entière : f est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}$

4. La fonction f étant de classe C^∞ la fonction f' est continue et bornée sur tout segment.

Il en résulte que f est lipschitzienne sur tout segment de $\mathbb{R}$

5. On a vu que f est dérivable, et pour tout x , $f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{nx^{n-1}}{n!^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!n!}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$: on a, pour $n \geq 1$, $\frac{x^n}{(n-1)!n!} \leq \frac{x^n}{n!}$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \leq e^x$

6. Soient x et y deux réels positifs, on pose $z = \max(x, y)$.

Alors pour tout t compris entre x et y , $|f'(t)| \leq e^z$. On applique maintenant le théorème des accroissements finis entre x et y :

$$|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$$

ce qui est précisément ce que l'on souhaite.

On peut aussi utiliser la formule de Bernoulli. Soit $x > 0$ On a puisque toutes les séries sont convergentes :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - y^n}{(n!)^2} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}{(n!)^2} \right| \leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n z^{n-1}}{(n!)^2} \leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z |x-y|$$

7. La fonction f étant développable en série entière, elle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.

Ainsi : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et donc : $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

8. On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} dt$.

Soit $x > 0$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t[f(t)]^2}$ est continue sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) puisque f est continue et ne s'annule pas sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$).

Ainsi, la fonction g est bien définie sur $]0, +\infty[$. De plus, $t \mapsto \frac{1}{t[f(t)]^2}$ est de classe C^∞ donc, par le

théorème fondamental de l'analyse, g est dérivable, de dérivée $t \mapsto \frac{1}{t(f(t))^2}$

On en déduit enfin que la fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

9. Comme $g' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, g est strictement croissante sur cet intervalle.

De plus, $g(1) = 0$ implique que g est strictement négative sur l'intervalle $]0, 1[$ et strictement positive sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

10. Soit $x > 0$.

$\frac{1}{t(f(t))^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Alors, par intégration des relations de comparaison, on obtient : $\int_1^x \frac{1}{t(f(t))^2} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_1^x \frac{1}{t} dt$, soit

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$$

11. On écrit, pour tout $t > 0$: $f(t) = 1 + t + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2} \geq 1 + t > t$.

12. Pour tout $t > 1$, on a $\frac{1}{t(f(t))^2} \leq \frac{1}{t^3}$ donc, par comparaison avec une série de Riemann, l'intégrale est

convergente au voisinage de $+\infty$, on en déduit que g admet une limite en $+\infty$

13. D'après le cours : $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$.

Par la méthode des pôles, on a facilement $a = 1$ et $c = -1$.

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} x F(x) = 0 = a + b$, on tire finalement $b = -a = -1$

Ainsi :
$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}$$

14. On déduit de la question **11.** que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $g(x) \leq \int_1^x F(t) dt$

Comme $\int_1^x F(t) dt = \left[\ln(t) - \ln(t+1) + \frac{1}{1+t} \right]_1^x = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$, le résultat est établi,

soit : $g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2}$

15. On peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)$.

En utilisant alors la concavité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall t > 0$, $\ln(1-t) \leq -t$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} \leq 0.$$

Le résultat obtenu à la question précédente donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \leq \ln(2)$$

Commentaires généraux

Tout d'abord, répétons comme tous les ans les mêmes remarques générales que trop de candidats ne semblent pas respecter :

— Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées, voire illisibles par endroits (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examineur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.**

Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent. Nous avons même rencontré cette année des candidats qui utilisent leur propre numérotation différente de celle de l'énoncé.

Les copies quasiment illisibles sont lourdement pénalisées.

Enfin, l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

Nous insistons sur ces points qui défavorisent à coup sûr le candidat, même s'il n'y a pas dans le barème de points de présentation : le correcteur regarde la copie d'un œil moins bienveillant dans ce cas.

— Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

— De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent « le théorème spectrale » etc.

— Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » , « forcément » ,etc , qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

— De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

— Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc.

— Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Cette année, nous avons choisi de poser uniquement trois exercices, le deuxième parcourant une bonne partie du programme d'algèbre linéaire des deux années de classes préparatoires.

Le premier exercice portait sur les extrema avec contrainte d'une fonction à plusieurs variables obtenu par différentes méthodes et il n'y avait pas, cette année, d'exercices de probabilités.

— Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité de chaque exercice du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée.

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MP et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :
 - * Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
 - * On trouve encore trop d'équivalents à 0.
 - * Les quantificateurs, les symboles $\implies$, $\iff$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

Nous essayons de construire nos exercices de façon très progressive, les dernières questions étant parfois plus difficiles et nous sommes donc surpris lorsque des candidats négligent totalement un exercice.

Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons cette année dans ce rapport une correction succincte du sujet afin d'inciter les candidats à l'étudier attentivement en reprenant « à la main » les parties parfois rapidement rédigées.

Commentaires par exercices

Exercice 1

Exercice sur la recherche d'extrema sous une contrainte d'une fonction à plusieurs variables en utilisant diverses méthodes.

Cet exercice a été trop peu traité par les candidats et nous le regrettons. Il n'y avait pourtant pas de grosses difficultés théoriques et plusieurs questions étaient quasiment des questions de cours : il est surprenant de constater que beaucoup de candidats ont des difficultés à prouver que F défini par son équation $x + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Notons les principales erreurs rencontrées :

- Un point critique n'est pas forcément un extremum, même sur un ouvert.
- Très peu d'étudiants (1% environ) pensent à signaler que f est de classe C^1 avant de calculer ses dérivées partielles.
- On note une utilisation abusive de la trace et du déterminant de la Hessienne pour déterminer le signe des valeurs propres, alors que celles-ci sont calculées explicitement par le candidat.

— Montrer que F , donné par son équation $x + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner sa dimension représente un réel challenge pour certains candidats.

On a même rencontré :

* $F(\lambda X + Y) = \lambda F(X) + F(Y)$ pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

* $O \in F$ et donc, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

— Trouver l'orthogonal de F reste souvent d'une difficulté extrême.

— La notion de sous-espace affine semble inconnue de beaucoup d'étudiants.

Exercice 2

Cet exercice traite d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et faisait souvent appel au calcul sur les nombres complexes.

Nous sommes frappés par la méconnaissance des notions élémentaires de calcul dans $\mathbb{C}$ pour de nombreux candidats.

De façon plus précise :

— La somme des termes d'une suite géométrique n'est pas toujours connue.

Ainsi, la première question a été souvent maltraitée ce qui a entraîné par la suite de nombreux calculs inachevés voire non effectués.

— Bien que l'on ait rappelé que $\omega^n = 1$ et que $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \frac{1}{\omega}$, beaucoup de candidats ont eu du mal à mettre en oeuvre ces relations.

— Il faut savoir poser le produit de deux matrices et ne pas écrire de grosses matrices avec des points pour effectuer le produit de deux matrices de taille n .

— Les racines du polynôme $X^4 - 1$ sont parfois assez étonnantes.

— Trop de candidats ont traité les questions **3.** à **7.** dans le cas $n = 3$.

— Beaucoup d'étudiants obtiennent des polynômes caractéristiques de degré différent de la taille de la matrice sans que cela ne leur pose problème.

Rappelons qu'il est important de lire complètement l'énoncé de chaque exercice : cela aurait permis à plus de candidats de traiter les questions faciles situées dans la deuxième partie de l'exercice.

Exercice 3

Exercice d'analyse classique mettant en oeuvre quelques théorèmes du programme d'analyse de deuxième année.

La dérivée de la fonction $x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ amène toujours son lot de résultats surprenants !

Quelques remarques qui nous ont marquées :

— Le développement en série entière de la fonction exponentielle laisse souvent perplexes. Le domaine de validité est faux pour environ 10% des candidats...

— Certains candidats traitent les sommes de séries de la même façon que les sommes finies : la fonction

$x \mapsto \frac{x^n}{(n!)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc, la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$!

- f uniformément continue (sans intervalle) n'implique pas f lipschitzienne (toujours sans intervalle)!
- Toujours sur les fonctions lipschitziennes : pour montrer que f est lipschitzienne sur $[a, b]$, il ne suffit pas de montrer qu'il existe $k \geq 0$, tel que $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.
- Une fonction développable en série entière n'est pas une fonction polynomiale!
- $f(x) \leq e^x$ n'implique pas que $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, tout comme $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ n'implique pas que $f(x) \geq 1 + x$.
- Quasiment personne ne rappelle que si f est développable en série entière, elle possède un développement limité de tout ordre au voisinage de 0.
- Même si la fonction h est positive, on ne peut en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_1^x h(t) dt \geq 0$.
- $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ ne peut dépendre de t , tout comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ne peut dépendre de n .
- On a aussi vu : $f(x) = \frac{1}{n!} e^x$.

Luc Valette.