Rapport du jury - 2025 - MPI

Énoncé

EXERCICE 1

Soit $f : m = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{x_j} \in \mathbb{R}$.

1. Étudier l'existence d'extrema locaux de f.

2. La fonction f est-elle majorée ?

3. Démontrer que f admet une borne inférieure que l'on déterminera.

Soit g la fonction qui à $m = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe $g(m) = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

On note $H = g^{-1}(\{0\}) = \left\{ m = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \right\}$

4. Déterminer le seul extremum possible de la restriction de f à H.

5. Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$.

6. En déduire que f admet, sous la contrainte H, un minimum global que l'on déterminera.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note dans tout l'exercice :
- $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$,
- A et B les deux polynômes : $A = X^n - 1$ et $B = X^n - X$.

Questions préliminaires

1. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.

2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

On pourra ***poser*** *la division euclidienne de A par B.*

3. Déterminer le PGCD des polynômes A et B.

4. Décomposer les deux polynômes A et B en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Les n racines distinctes de B seront notées : $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ *et* z_n *avec* $z_n = 0$.

* * * * * *

On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne du produit AP par B.

5. Prouver que f est un endomorphisme de E.

6. Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. En posant la division euclidienne, déterminer $f\left(X^k\right)$.

7. De la même façon, déterminer $f\left(X^{n-1}\right)$.

8. En déduire la matrice M de f dans la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ de E.

9. Calculer la trace de M.

Étude du noyau et de l'image de f

10. Justifier que le rang de M est égal à $n-1$.

11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

12. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

13. Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \left\{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\right\}$.

14. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Éléments propres de f

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On note P_j le polynôme de E défini par $P_j = \dfrac{B}{X-z_j} = \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(X-z_k)$ et $R_j = f(P_j)$.

15. Vérifier que $P_j(z_j) \neq 0$.

16. Montrer que les racines de P_j sont racines de R_j.

17. En déduire qu'il existe un scalaire λ_j tel que $R_j = \lambda_j P_j$. Que peut-on alors dire du polynôme P_j ?

18. Montrer que l'on a : $A(z_j) = \lambda_j$.

19. En déduire l'expression de λ_j à l'aide de z_j. On précisera la valeur de λ_n.

20. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

21. Retrouver la valeur de la trace de l'endomorphisme f.

22. Déterminer le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f sous forme développée.

23. En déduire le déterminant de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.

EXERCICE 3

Questions préliminaires

1. Déterminer le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ et donner son domaine de validité.

2. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)\,t^n$.

3. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n t^n$ deux séries entières définies sur $]-R,R[$ (avec $R>0$).

On note $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n\, t^n$ le produit de Cauchy de ces deux séries entières.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Choisir sans justification l'expression correcte de c_n :

$$(a)\; c_n = \sum_{p-q=n} a_p\, b_q \qquad (b)\; c_n = \sum_{p-q\leqslant n} a_p\, b_q \qquad (c)\; c_n = \sum_{p+q\leqslant n} a_p\, b_q \qquad (d)\; c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q$$

4. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
Rappeler sans démonstration la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

*****

On rappelle que si t est un réel, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t et que l'on a : $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$ ou encore $t-1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note E_x l'ensemble : $E_x = \left\{ m = (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ \sqrt{a^2+b^2} \leqslant x \right\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières positives du disque fermé de centre O et de rayon x.

On pose enfin $G(x) = \mathrm{Card}(E_x)$.

5. Représenter graphiquement E_2 et déterminer $G(2)$.

6. En utilisant le changement de variable $t = \sin(u)$, calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t$.

7. Montrer que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $G(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \sqrt{n^2-k^2} \right\rfloor + 1 \right)$.

On pourra s'aider d'un dessin.

8. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(1-\dfrac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} = \dfrac{\pi}{4}$.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2-k^2}$. Démontrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \dfrac{\pi}{4}$.

10. En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque l'entier n tend vers plus l'infini.

11. Déterminer alors un équivalent de la fonction G au voisinage de plus l'infini.

12. On définit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ où a_n vaut 1 si n est le carré d'un entier et 0 sinon.

Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. On notera h la somme de cette série.

13. On pose, pour $t \in I =]-1,1[$, $g(t) = \dfrac{h(t)^2}{1-t}$. Prouver que : $\forall\, t \in I$, $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} G\left(\sqrt{n}\right) t^n$.

Un équivalent de g

14. Montrer que l'on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^\star, \text{ tel que } \forall\, n \geqslant n_0,\ \left| G\left(\sqrt{n}\right) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| \leqslant \varepsilon\,(n+1)$$

15. En majorant la quantité $\left| g(t) - \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, t^n \right|$, montrer que $g(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{4}(1-t)^{-2}$.

Corrigé

Correction EXERCICE 1

1. Le vecteur gradient de f en un point M est $\nabla(f)(M) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \vdots \\ e^{x_n} \end{pmatrix}$, ce qui prouve que f ne possède pas de point critique. Il en résulte que $\boxed{f \text{ ne possède pas d'extremums}}$

2. On a : $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} f(M) = +\infty$ et donc, $\boxed{f \text{ n'est pas majorée}}$

3. 0 est un minorant évident de f.

Comme $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} f(x_1, ..., x_1) = \lim\limits_{x_1 \to -\infty} n\,e^{x_1} = 0$, $\boxed{0 \text{ est le plus grand des minorants de } f}$

4. On a : $H^\perp = \text{Vect}(u)$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\nabla(f)(M) \in H^\perp \iff x_1 = x_2 = ... = x_n$. Et $M \in H$ entraîne que $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Réciproquement, $\nabla(f)(0) \in H^\perp$ et $0 \in H$.

Ainsi, $\boxed{\text{le seul point critique de } f \text{ sous la contrainte } H \text{ est le point } A = 0}$

5. L'inégalité découle de la convexité de la fonction exponentielle.

6. On en déduit : $\forall\, M \in H,\ f(M) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j + 1) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j + n = n = f(A)$.

Il en résulte que $\boxed{f \text{ admet en } A \text{ un minimum global sous la contrainte } H}$

Correction EXERCICE 2

Questions préliminaires

1. C'est du cours.

2. On a facilement : $A = X^n - 1 = X^n - X + X - 1 = B + X - 1$ et donc

$$\boxed{\text{le quotient de } A \text{ par } B \text{ vaut 1 et le reste est le polynôme } X - 1}$$

3. D'après la question précédente, le PGCD de A et de B est également un diviseur de $X - 1$.

Et comme $X - 1$ divise à la fois A et B, $\boxed{\text{le PGCD des polynômes } A \text{ et } B \text{ vaut } X - 1}$

4. Les racines de A sont les racines n-ième de l'unité : ω^k, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

Ainsi : $\boxed{A = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)}$

On peut écrire $B = X(X^{n-1} - 1)$ et donc, les racines du polynôme B sont $z_n = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $z_k = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n-1}}$.

Ainsi : $B = (X - z_n) \prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k) = X \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n-1}}\right)$

* * * * * *

5. • D'après la définition de la division euclidienne, f est une application de E dans E.

• On montre que f est linéaire : soient P_1 et P_2 deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $R_1 = f(P_1)$ (resp. $R_2 = f(P_2)$), on a :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \text{ et } AP_2 + BQ_2 + R_2$$

Alors : $A(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda Q_1 +_2) B + \lambda R_1 + R_2 \quad (*)$

Comme $\deg(R_1) < n$ et $\deg(R_2) < n$, on a aussi $\deg(\lambda R_1 + R_2) < n$ et donc, $(*)$ est bien la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + P_2)$ par B.

Ceci prouve bien que $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$, c'est-à-dire que f est linéaire.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$

6. Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$.

La division euclidienne de AX^k par B donne comme quotient X^k et comme reste $X^{k+1} - X^k$:

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-2]\!], f\left(X^k\right) = X^{k+1} - X^k}$$

7. Pour calculer $f\left(X^{n-1}\right)$, il faut pousser la division un peu plus loin, ce qui donne :

$$\boxed{f\left(X^{n-1}\right) = -X^{n-1} + X}$$

8. On en déduit la matrice M de f dans la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ de E :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Facilement, la trace vaut : $\boxed{\mathbf{tr}(M) = -n}$

Étude du noyau et de l'image de f

10. En notant L_i la ligne d'indice i de la matrice M, on a $\sum_{i=1}^{n} L_i = 0$.
De plus, les $n-1$ premières colonnes sont libres (vecteurs échelonnés).

Ainsi, $\boxed{\text{le rang de } M \text{ est égal à } n-1}$

11. En utilisant la question précédente, les $n-1$ premières colonnes de la matrice M constituent une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Cela revient à dire que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-X, ..., X^n - X^{n-1})}$

12. On sait déjà, d'après le Théorème du rang que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace de dimension 1.

On utilise la matrice M : si $P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ est un polynôme du noyau de f, alors $MP = 0$, soit $\begin{cases} -a_0 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_n = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-2} - a_{n-1} = 0 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} \end{cases}$

On en déduit que : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(X + X^2 + ... + X^{n-1}\right)}$

13. D'après la question **11.** un polynôme de $\mathrm{Im}(f)$ s'écrit sous la forme $Q = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\,(X^k - X^{k-1})$, c'est-à-dire que $Q = (X-1)\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, X^{k-1}$.

On en déduit que : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \left\{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\right\}}$

14. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$: $P(1) = 0$ et $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda\left(X + X^2 + ... + X^{n-1}\right)$
Alors $\lambda = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe.

Le Théorème du rang assure alors que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } E}$

Éléments propres de f

15. Les racines de P_j sont par définition les z_k sauf z_j et $P_j(z_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (z_j - z_k) \neq 0$ puisque toutes les racines de B sont distinctes. Ainsi : $\boxed{P_j(z_j) \neq 0}$

16. Par définition de R_j, il existe un unique polynôme Q_j tel que $AP_j = BQ_j + R_j \ \ (**)$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $k \neq j$: $B(z_k) = P_j(z_k) = 0$ et donc, $R_j(z_k) = 0$. Les racines de P_j sont racines de R_j.

17. Comme les z_k sont deux à deux distinctes, P_j divise R_j. Par comparaison des degrés, il existe λ_j dans $\mathbb{C}$ tel que : $R_j = \lambda_j R_j$.

On a : $R_j = f(P_j) = \lambda P_j$ et donc, $\boxed{P_j \text{ est un vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur propre } \lambda_j}$

18. En utilisant la relation $(**)$, on obtient : $A(z_j)\, P_j(z_j) = B(z_j)\, Q_j(z_j) + R_j(z_j)$,

et comme $B(z_j) = 0$, $R_j = \lambda_j R_j$ et $R_j(z_j) \neq 0$, il vient finalement : $\boxed{A(z_j) = \lambda_j}$

19. Comme $A(z_j) = z_j^n - 1$ et $z_j^n = z_j$ puisque $B(z_j) = z_j^n - z_j = 0$, on obtient $\boxed{\lambda_j = z_j - 1}$

En particulier : $\boxed{\lambda_n = -1}$

20. L'endomorphisme f possède n valeurs propres distinctes : $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

21. D'après le cours, $\mathbf{tr}(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} (z_j - 1) = \sum_{j=1}^{n} z_j - n$.

Les z_j sont les racines du polynôme B : en utilisant les relations coefficients racines, il vient $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$ et

on retrouve : $\boxed{\mathbf{tr}(f) = -n}$

22. Le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f est de degré n, est unitaire et admet pour racines les valeurs propres de f. Ainsi : $\chi_f(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - z_j + 1)$.

En remarquant alors que $\chi_f(X-1) = B(X)$, il vient : $\chi_f(X) = B(X+1)$, soit $\boxed{\chi(X) = (X+1)^n - (X+1)}$

En utilisant la formule du binôme, on obtient enfin : $\boxed{\chi_f(X) = (n-1)X + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k}$

23. Notons $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.
Puisque : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, les valeurs propres de $\tilde{f}$ sont les valeurs propres non nulles de f.

Il en résulte que $\det(\tilde{f}) = \prod_{k=1}^{n-1} z_k$.

Pour calculer ce produit on utilise l'expression obtenue à la question précédente de $\chi(f)$: $\chi(f)(X) = X\,T(X)$ où les $(z_k)_{k \in [\![1, n-1]\!]}$ sont exactement les racines de T.

On en déduit que $\prod_{k=1}^{n-1} z_k$ est égal au coefficient constant de ce polynôme T multiplié par $(-1)^{n-1}$, ce qui donne : $\boxed{\det(\tilde{f}) = (-1)^{n-1}\,(n-1)}$

Correction EXERCICE 3

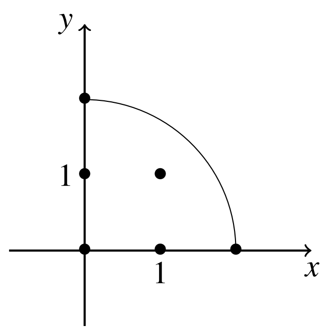
1. C'est du cours : $\forall\, t \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,t^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right)' = \dfrac{1}{(1-t)^2}$.

3. C'est du cours. La réponse (d).

4. Somme de Riemann.

5. On a la figure suivante :



$G(2) = 6$.

6. Par le changement de variable $t = \sin(u)$, $\boxed{J = \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{\pi}{4}}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$G(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels (k, ℓ) tels que : $\begin{cases} k \in [\![0, n]\!] \\ \text{et} \\ 0 \leqslant \ell < \sqrt{n^2 - k^2} \end{cases}$

Pour un k fixé, il y a donc $1 + \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor$ nombres entiers ℓ correspondant.

On a donc bien : $\boxed{G(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\left\lfloor \sqrt{n^2-k^2}\right\rfloor + 1\right)}$

8. Il s'agit d'une somme de Riemann et c'est l'intégrale du 1.

9. On sait que $\sqrt{n^2-k^2} \leqslant \left\lfloor \sqrt{n^2-k^2} \right\rfloor \leqslant \sqrt{n^2-k^2} + 1$ et donc : $S_n \leqslant G(n) \leqslant S_n + n + 1$.

Mais, $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \dfrac{k^2}{n^2}\right)^{1/2}$ et par suite, $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\,\dfrac{\pi}{4}}$

10. Comme $G(n) = S_n + O(n)$, on a finalement : $\boxed{G(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi n^2}{4}}$

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n = \lfloor x \rfloor$. Alors, $G(n) \leqslant G(x) \leqslant G(n+1)$ et donc, $\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi x^2}{4}}$

12. On pose $a_n = 1$ si n est un carré et 0 sinon. On peut écrire que $h(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Comme la suite (a_n) est bornée par 1 mais ne tend pas vers 0, $\boxed{R = 1}$

13. Le cours sur les séries entières permet d'affirmer que g est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Alors, $\forall x \in]-1, 1[$, $h(x)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k$, puis $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k = \sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_i a_j$.

Ainsi, c_n est le nombre de couples de carrés dont la somme est majorée par n : $c_n = G(\sqrt{n})$ et finalement,

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[, \; g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} G(\sqrt{n})\, t^n}$$

14. D'après la question **10.** $G(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi (n+1)}{4}$.

Soit donc $\varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $\left| G(\sqrt{n}) - \dfrac{\pi (n+1)}{4} \right| < \varepsilon (n+1)$.

15. On en déduit qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| G(\sqrt{n}) - \dfrac{\pi (n+1)}{4} \right| < M (n+1)$.

D'où : $\left| g(t) - \dfrac{\pi}{4} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, t^n \right| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} (n+1)\, t^n + M \sum\limits_{n=0}^{N} (n+1)\, t^n$

Comme $\sum\limits_{n=0}^{N} (n+1)\, t^n \leqslant \dfrac{N+1}{1-t}$ et en utilisant ce qui a été fait précédemment, on peut écrire que :

$\left| g(t) - \dfrac{\pi}{4} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, t^n \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{(1-t)^2} + \dfrac{M(N+1)}{(1-t)}$, ce qui prouve que $\boxed{g(t) \underset{t\to1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{4} (1-t)^{-2}}$

Commentaires généraux

Tout d'abord, répétons comme tous les ans les mêmes remarques générales que trop de candidats ne semblent pas respecter :

— Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées, voire illisibles par endroits (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent. Nous avons même rencontré cette année des candidats qui utilisent leur propre numérotation différente de celle de l'énoncé.

Les copies quasiment illisibles sont lourdement pénalisées.

Enfin, l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

Nous insistons sur ces points qui défavorisent à coup sûr le candidat, même s'il n'y a pas dans le barème de points de présentation : le correcteur regarde la copie d'un œil moins bienveillant dans ce cas.

— Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

— De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent « le théorème spectrale » etc.

— Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » , « forcément » ,etc , qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

— De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

— Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc.

— Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Cette année, nous avons choisi de poser uniquement trois exercices, le deuxième parcourant une bonne partie du programme d'algèbre linéaire des deux années de classes préparatoires.
Le premier exercice portait sur les extrema avec contrainte d'une fonction à plusieurs variables obtenu par différentes méthodes et il n'y avait pas, cette année, d'exercices de probabilités.

— Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité de chaque exercice du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée.

— Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MP et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.

— Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :

- ⋆ Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
- ⋆ On trouve encore trop d'équivalents à 0.
- ⋆ Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

<u>**Conclusion**</u> : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous essayons de construire nos exercices de façon très progressive, les dernières questions étant parfois plus difficiles et nous sommes donc surpris lorsque des candidats négligent totalement un exercice.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons cette année dans ce rapport une correction succincte du sujet afin d'inciter les candidats à l'étudier attentivement en reprenant « à la main » les parties parfois rapidement rédigées.

Commentaires par exercices

Exercice 1

Cet exercice consiste en la recherche d'extrema sous contrainte d'une fonction à plusieurs variables simple.
Nous avons constaté que cet exercice a été très souvent négligé par les candidats, alors que plusieurs questions ne présentaient pas de réelles difficultés.
De façon plus précise :

— Une grande confusion entre extrema et points critiques.

— On lit dans de nombreuses copies que la fonction f est dérivable, croissante.

— Trop peu d'étudiants pensent à signaler que f est de classe C^1 avant de calculer ses dérivées partielles.

— Beaucoup de candidats ne voient pas de différence entre borne inférieure et minimum.

— 80% des candidats ignorent totalement le théorème sur les extrema sous contrainte.

Exercice 2

Exercice classique d'algèbre linéaire sur l'ensemble $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ utilisant la division euclidienne des polynômes.
Après des questions préliminaires destinées à mettre en place des résultats simples, utiles pour la suite, la première partie est consacrée à l'étude des premières propriétés de l'endomorphisme f tandis que la deuxième partie permet de déterminer les éléments propres de f.

— Dans les questions préliminaires, la définition de la division euclidienne des polynômes reste bien trop souvent approximative, l'hypothèse cruciale sur le degré étant généralement oubliée.

— Si les racines de $A = X^n - 1$ sont bien déterminées, étonnamment, il n'en est en général pas de même de celles de $B = X^n - X$.

— Démontrer que f est un endomorphisme reste une question difficile pour la majorité des candidats, la définition de la division euclidienne n'étant pas correctement énoncée.

— On a lu : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(B)$, alors que B n'est pas dans E.

Exercice 3

Exercice d'analyse utilisant des résultats sur les séries entières et consistant à compter le nombre de points à coordonnées entières positives dans le cercle de centre 0 et de rayon x.
Dans cet exercice comme dans le précédent, des questions préliminaires simples permettaient de situer le contexte et d'établir des résultats utiles pour la suite.

— Il est inadmissible de rencontrer des erreurs dans le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

— De grosses difficultés pour la détermination de la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)\,t^n$: trop peu relient correctement cette question à la précédente.

— Bien que les questions **3.** et **4.** soient en général bien traitées, notons des résultats étonnants du style : $c_n = \sum\limits_{p,q,n} a_p\, b_q$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = 0$.

— Le dessin demandé à la question **5.**, qui devait, à notre sens, aider le candidat à cerner le problème, est souvent bâclé, voire faux (une copie sur 2) !

— Le calcul de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t$ a donné lieu à des manipulations étranges : après avoir posé $t = \sin(u)$ et simplifié l'intégrande sans justification de signe, on voit alors apparaître la dérivée de $\dfrac{\sin(u)\,\cos(u) + u}{2}$. On rappelle $\sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$.
Le calcul trigonométrique (même simple) : linéariser $\cos^2(u)$ devient extrêmement troublant.

— La manipulation des équivalents n'est pas toujours heureuse...mais comme les résultats sont donnés.

* * * * * *

Luc Valette.