Rapport du jury - 2025 - PC

Énoncé

EXERCICE 1

Question préliminaire

Soit φ la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = 2t^3 - t^2 + 1$$

1. Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et en donner la représentation graphique dans le plan muni d'un repère.

*****

Soit $f : M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^2 \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les points critiques sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f.

3. En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon 2 : $D = \left\{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

4.1. Justifier que f admet dans D des extrema globaux.

4.2. Justifier que ces extrema sont atteints sur le cercle de centre O et de rayon 2.

4.3. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon 2 : il existe donc $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que $M = (2\cos(\alpha), 2\sin(\alpha))$. Démontrer que : $f(M) = 4\,\varphi(\cos(\alpha))$.

4.4. En déduire les extrema globaux de f sur D.

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2\, y''(x) + x\, y'(x) - (x^2 + x + 1)\, y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E). Calculer $y(0)$.

2. On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

2.1. Montrer que l'on a : $\begin{cases} \forall\, n \geqslant 2, \quad (n^2 - 1)\, a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

2.2. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ |a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)\,!}$.

2.3. Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On pose, pour tout x réel, $z(x) = x\,y(x)\ \mathrm{e}^x$.

3.1. Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

3.2. Prouver que z' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$x\,u'(x) - (2x+1)\ u(x) = 0 \quad (F)$$

d'inconnue la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3.3. Une équation différentielle

3.3.1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right) u = 0$$

3.3.2. Justifier que les solutions sont prolongeables par continuité en 0.

3.4. Démontrer que, pour tout réel c, la fonction $x \mapsto cx\mathrm{e}^{2x}$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

On admet que ce sont les seules solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.5. Démontrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ z(x) = a(2x-1)\ \mathrm{e}^{2x} + a$$

3.6. Déterminer alors une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

EXERCICE 3

Soient r un nombre réel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors $A^\top \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de la matrice A.
On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $(X\,|\,Y) = X^\top Y$.
On note enfin J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

3. Prouver que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice J et une matrice diagonale D semblable à J.

5. Démontrer que $\mathrm{Im}(J)$ et $\mathrm{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

6. Justifier que $M_r \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

7. Vérifier que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

8. Pour tout couple (X, Y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_r(X, Y) = X^\top M_r Y$.

8.1. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $Y \mapsto f_r(X, Y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

8.2. Montrer que : $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $f_r(X, Y) = f_r(Y, X)$.

8.3. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f_r(X, Y) = (X')^\top \Delta_r Y'$$

où l'on a posé $X' = PX$ et $Y' = PY$.

On ne déterminera pas la matrice P.

8.4. Déterminer les valeurs de r pour lesquelles l'application f_r définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE 4

Questions de cours

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
Rappeler la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

*****

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- il existe $p \in]0, 1[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\,q^k$ avec $q = 1 - p$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$.

4. Étude de la variable aléatoire $X + Y$

4.1. Dans quel ensemble la variable aléatoire $X + Y$ prend-elle ses valeurs ?

4.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

4.3. Soient n et k deux entiers naturels.

4.3.1. Lorsque $k > n$, calculer $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k)$.

4.3.2. On prend $k \leqslant n$. Démontrer qu'il existe un scalaire r_n tel que : $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = r_n$.

5. On pose $V = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$ où $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux réels a et b.

5.1. Dans quels ensembles les variables aléatoires V et M prennent-elles leurs valeurs ?

5.2. Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbb{P}(M \geqslant k)$.

5.3. En déduire la loi de la variable aléatoire M.

5.4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'évènement $(M = k) \cap (V = r)$.
On pourra distinguer les deux cas $r < 0$ et $r \geqslant 0$.

5.5. En déduire la loi de V.

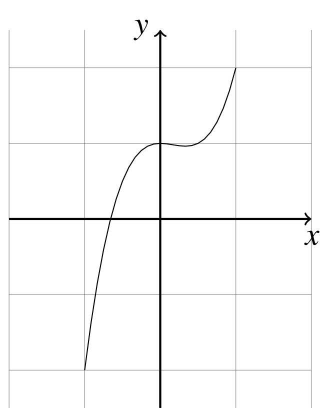
5.6. Étudier l'indépendance des deux variables aléatoires M et V.

Corrigé

EXERCICE 1

1. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = 6t^2 - 2t = t(6t - 2)$. Donc φ est croissante sur $[-1, 0]$, décroissante sur $[0, 1/3]$ et croissante sur $[1/3, 1]$.

t	-1		0		$1/3$		1
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$	2



2. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

Pour $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(M) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\boxed{\text{le seul point critique est le point O avec } f(0,0) = 0}$

3. Comme $f(x, 0) = x^3$ qui change de signe avec x :

— si $x > 0$, $f(x, 0) > 0 = f(0, 0)$

— si $x < 0$, $f(x,0) < 0 = f(0,0)$

et $\boxed{\text{il n'y a pas d'extremum local en O}}$

4.

4.1. D est fermé et borné, et f est continue et ainsi, $\boxed{f \text{ admet, sur } D\text{, un minimum et un maximum}}$

4.2. Si f admettait un extremum à l'intérieur du disque D, alors f celui-ci serait un extremum local sur $\mathbb{R}^2$, ce qui contredit la question précédente. On en déduit que **les extrema de f sur D sont sur le cercle de centre 0 et de rayon 2**.

4.3. On a :
$f(M) = f(2\cos(\alpha), 2\sin(\alpha)) = 8\cos^3(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) = 8\cos^3(\alpha) + 4(1 - \cos^2(\alpha)) = 4\varphi(\cos(\alpha))$.

4.4. D'après la première question, le maximum de φ sur $[-1, 1]$ vaut 2 et est atteint en 1 et son minimum vaut -2 et est atteint en -1.
Ainsi, comme pour tout $\alpha \in]-\pi, \pi]$, $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, on a pour tout M sur le cercle de centre O et de rayon 2, $f(M) \in [-8, 8]$, avec $f(M) = -8 \iff M = (-2, 0)$ et $f(M) = 8 \iff M = (2, 0)$.
D'où les extremums de f sur D.

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + x + 1)\, y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. On évalue en 0 pour obtenir $-y(0) = 0$ donc $y(0) = 0$.

2.

2.1. D'après la question précédente, $f(0) = 0$, donc $\boxed{a_0 = 0}$ et comme $f'(0) = 1$, on a : $\boxed{a_1 = 1}$

Puis, pour tout $|x| < R$, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^n - (x^2 + x + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= -a_0 - a_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n^2 - 1)a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n
\end{aligned}$$

ce qui donne par unicité du DSE $\boxed{\forall\, n \geqslant 2,\quad (n^2 - 1)\, a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0}$

2.2. Montrons par récurrence double sur $n \geqslant 1$ que $|a_n| \leq \dfrac{1}{(n-1)!}$.

— On a bien $|a_1| \leqslant 1$ et $|a_2| = \dfrac{1}{3}a_1 + a_0 = \dfrac{1}{3} \leqslant 1$.

— Soit donc n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que $|a_{n-1}| \leqslant \dfrac{1}{(n-2)\,!}$ et que $|a_{n-2}| \leqslant \dfrac{1}{(n-3)\,!}$.

Alors : $(n^2-1)\,|a_n| \leqslant |a_{n-1}| + |a_{n-2}| \leqslant \dfrac{1}{(n-2)\,!} + \dfrac{1}{(n-3)\,!}$ soit $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n-1)\,!} + \dfrac{1}{(n^2-1)(n-3)\,!}$.

On en déduit alors que : $(n-1)\,!\,|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2-1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n-2}{n+1} = \dfrac{n-1}{n+1} < 1$, ce qu'il fallait montrer.

Ainsi : $\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ \ |a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)\,!}}$

2.3. La majoration précédente entraîne que le rayon de convergence de la série entière définissant f est infini puisque celui de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)\,!}\, x^n = x \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)\,!}\, x^{n-1} = x \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n\,!}\, x^n$ est infini.

Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction } f \text{ est } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$

3. 3.1. z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \mathrm{e}^x(y(x) + xy'(x) + xy(x))$. Donc $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$.

3.2. On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z''(x) = \mathrm{e}^x(2y(x) + 2xy'(x) + xy(x) + 2y'(x) + xy''(x))$ puis,

$$\begin{aligned}
xz''(x) - (2x+1)z'(x) &= \mathrm{e}^x(2xy(x) + 2x^2y'(x) + x^2y(x) + 2xy'(x) + x^2y''(x)) \\
&\quad - \mathrm{e}^x(2xy(x) + 2x^2y'(x) + 2x^2y(x) + y(x) + xy'(x) + xy(x)) \\
&= \mathrm{e}^x(-x^2y(x) - y(x) + xy'(x) + x^2y''(x) - xy(x)) \\
&= \mathrm{e}^x(x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2 + y + 1)y(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.3.

3.3.1. Les solutions de $u'(x) + \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)u(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ sont de la forme $x \mapsto \lambda\, x\, \mathrm{e}^{2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.3.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u : x \mapsto \lambda\, x\, \mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution. Comme $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0^+$, u est prolongeable par continuité en 0 en posant $u(0) = 0$.

3.4. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u : x \mapsto c\, x\, \mathrm{e}^{2x}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = c\, \mathrm{e}^{2x} + 2c\, x\, \mathrm{e}^{2x}$

On remplace et on trouve bien que : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ xu'(x) - (2x+1)u(x) = 0}$

3.5. Comme z' est solution sur $\mathbb{R}$ de (F), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que ; $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = cx\, \mathrm{e}^{2x}$. On primitive en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
z(x)-z(0) &= \int_0^x ct\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\\
&= [ct\frac{e^{2t}}{2}]_0^x - \frac{c}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{c}{2}x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{c}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{c}{4}\\
&= \frac{c}{4}\,(2x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{c}{4}
\end{aligned}$$

d'où le résultat car $z(0)=0$.

3.6. Comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, $\exists\, a\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $xf(x)\,\mathrm{e}^x = a(2x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + a$.

Donc $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$, $f(x) = a\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x + a\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = 2a\,\mathrm{e}^x - 2a\dfrac{\sinh(x)}{x}$.

On a bien $f(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$ car $\dfrac{\sinh(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$.

De plus, pour $x\neq 0$, $f'(x) = 2a\,\mathrm{e}^x - 2a\dfrac{x\cosh(x)-\sinh(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} 2a(1+o(1)) - 2a\dfrac{o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} 2a + o(1)$.

Donc $f'(0) = 2a = 1$ et $a = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour } x\neq 0,\ f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{\sinh(x)}{x}}$

EXERCICE 3

1. J est une matrice de rang 1 et $\mathrm{Im}(J) = \mathrm{Vect}(C_1)$ où C_1 est la première colonne de la matrice J.

2. D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(J)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ est dans $\mathrm{Ker}(J)$ si, et seulement si $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ qui est l'équation de $\mathrm{Ker}(J)$.

On en déduit que $X\in\mathrm{Ker}(J) \iff X = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ -x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}\end{pmatrix}$, ce qui donne comme base de $\mathrm{Ker}(J)$ la famille : $V_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, $\ldots$, $V_{n-1} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

3. La matrice J est symétrique réelle donc, diagonalisable.

4. 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(J)$.

La deuxième (et dernière) valeur propre est $\mathbf{tr}(J) = n$ et facilement, le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(C_1)$.

On en déduit alors que $D = \mathrm{diag}(0,...,0,n)$ en utilisant la base $(V_1,\ldots,V_{n-1},C_1)$.

5. On peut remarquer que le produit scalaire d'un vecteur de base de $\mathrm{Ker}(f)$ avec C_1 est nul, donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux. D'après le théorème du rang, ils sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

6. On a $M_r = r\,J + (1-r)\,I_n \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

7. La matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puisque symétrique réelle. Comme J est diagonalisable, il existe P inversible telle que $J = PDP^{-1}$.
Donc $M_r = r\,PDP^{-1} + (1-r)\,PP^{-1} = P(rD + (1-r)I_n)P^{-1}$
La matrice M_r est donc semblable à la matrice $\Delta_r = \mathrm{diag}(1-r, ..., 1-r, (n-1)r+1)$.
Remarque : si on a choisi $D = \mathrm{diag}(n, 0, \dots, 0)$, on a $\Delta_r = \mathrm{diag}((n-1)r+1, 1-r, \dots, 1-r)$.

8. Pour tout couple (X, Y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_r(X, Y) = X^T\, M_r\, Y$.

8.1. Prenons $Y, Z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $f_r(X, \lambda Y + Z) = X^\top M_r(\lambda Y + Z) = \lambda X^\top M_r Y + X^\top M_r Z = \lambda f_r(X, Y) + f_r(X, Z)$.
De plus, $X^\top$ est de taille $1 \times n$, M_r de taille $n \times n$ et Y de taille $n \times 1$, donc $X^\top M_r Y$ est de taille 1×1 et est un réel.
Donc $Y \mapsto f_r(X, Y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

8.2. Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Comme une matrice de taille 1 est égale à sa transposée,
$f_r(X, Y) = X^\top M_r Y = (X^\top M_r Y)^\top = Y^\top M_r X = f_r(Y, X)$ car M_r est symétrique.

8.3. D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $M_r = P^\top \Delta_r P$. Pour $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $f_r(X, Y) = X^\top\,(P^\top \Delta_r P)\,Y = X'\Delta_r Y'$, avec $X' = PX$ et $Y' = PY$.

8.4. D'après les questions précédentes, f_r est une forme bilinéaire symétrique, donc elle définit un produit scalaire ssi elle est définie positive. Prenons alors $X \in \mathbb{R}^n$ et notons $(x_1, \dots, x_n)$ les composantes de X'. On a donc $f_r(X, X) = (1-r)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + ((n-1)r+1)x_n^2$. Ainsi, f_r définit un produit scalaire ssi $1 - r > 0$ et $(n-1)r + 1 > 0$, autrement dit ssi $-\dfrac{1}{n-1} < r < 1$.

EXERCICE 4

1. Z peut prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$. De plus, $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

2. X_1 et X_2 sont indépendantes si pour tout $A \subset X_1(\Omega)$ et $B \subset X_2(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A)$ et $(X_2 \in B)$ sont indépendants. De façon équivalente, X_1 et X_2 sont indépendantes si pour tout $x \in X_1(\Omega)$ et tout $y \in X_2(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_1 = x, X_2 = y) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = y)$.

3. $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} pq^n = pq^k \frac{1}{1-q}$ car $q \in]0, 1[$. Donc on a bien $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$.

4. 4.1. Comme X et Y prennent des valeurs dans $\mathbb{N}$, $X + Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

4.2. Pour tout entier naturel n :
$(X + Y = n) = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} ((X = i) \cap (Y = n - i))$.

Ainsi, par indépendance : $\mathbb{P}(X + Y = n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = n - i) = \sum_{i=0}^{n} p\,q^i\,p\,q^{n-i} = (n+1)\,p^2\,q^n$.

4.3. 4.3.1. Comme $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \dfrac{\mathbb{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \dfrac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$, si $k > n$, $(Y = n-k)$ est impossible, donc $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = 0$.

4.3.2. Si $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \dfrac{1}{n+1}$ d'après la question précédente. On pose donc $r_n = \dfrac{1}{n+1}$ qui convient.

5. On pose $V = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$.

5.1. V prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ et M prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

5.2. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{P}(M \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k, Y \geqslant k)$.
Or $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$ et de même $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = q^k$ car X et Y ont même loi.
D'où $\mathbb{P}(M \geqslant k) = q^{2k}$.

5.3. On en déduit la loi de la variable aléatoire M :
pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \geqslant k) - \mathbb{P}(M \geqslant k+1) = q^{2k}(1-q^2)$.

5.4. Commençons par remarquer que $(V \geqslant 0) = (Y \geqslant X) = (M = X)$.

— Si $r \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k, V=r) &= \mathbb{P}(X=k, Y-X=r)\\ &= \mathbb{P}(X=k, Y=k+r)\\ &= \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k+r)\\ &= p^2\,q^{2k+r}\end{aligned}$$

par indépendance.

— Si $r < 0$, de même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k, V=r) &= \mathbb{P}(Y=k, X=k-r)\\ &= \mathbb{P}(Y=k)\,\mathbb{P}(X=k-r)\\ &= p^2\,q^{2k-r}\end{aligned}$$

<u>En conclusion</u> : $\mathbb{P}(M=k, V=r) = p^2\,q^{2k+|r|}$

5.5. La loi de V est donc une loi marginale du couple (M, V) donnée, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, par :
$\mathbb{P}(V=r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p^2\,q^{2k+|r|} = p^2\,q^{|r|}\,\frac{1}{1-q^2}$.

5.6. Avec les questions précédentes, on trouve que pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$,
$\mathbb{P}(M=k)\mathbb{P}(V=r) = \mathbb{P}(M=k, V=r)$ donc les deux variables aléatoires M et V sont indépendantes.

Commentaires généraux

Tout d'abord, répétons comme tous les ans les mêmes remarques générales que trop de candidats ne semblent pas respecter :

— Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées, voire illisibles par endroits (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent. Nous avons même rencontré cette année des candidats qui utilisent leur propre numérotation différente de celle de l'énoncé...

Les copies quasiment illisibles sont lourdement pénalisées.

Enfin, l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

Nous insistons sur ces points qui défavorisent à coup sûr le candidat, même s'il n'y a pas dans le barème de points de présentation : le correcteur regarde la copie d'un œil moins bienveillant dans ce cas.

— Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

— De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent « le théorème spectrale » etc.

— Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

— De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

— Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...

— Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Cette année, nous avons fait le choix de poser un premier exercice portant sur les extrema d'une fonction à plusieurs variables et de conserver un exercice de probabilités.

— L'étude d'une fonction polynômiale de degré 3 et sa représentation graphique apparaît aujourd'hui d'une extrême difficulté pour une trop grande partie des candidats !

— Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité de chaque exercice du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée.

— Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de

PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.

— Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :

 * Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.

 * On trouve encore trop d'équivalents à 0...

— Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

<u>**Conclusion**</u> : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous essayons de construire nos exercices de façon très progressive, seules les dernières questions étant parfois plus difficiles et sommes donc surpris lorsque des candidats négligent totalement un exercice.
Souvent les premières questions sont des questions de cours et il est inadmissible de ne pas savoir y répondre.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons cette année dans ce rapport une correction succincte du sujet afin d'inciter les candidats à l'étudier attentivement en reprenant « à la main » les parties parfois rapidement rédigées.

Commentaires par exercice

Exercice 1

Cet exercice de recherche d'extrema d'une fonction à plusieurs variables commence par une étude simple de fonction polynômiale de degré 3 qui devait mettre en confiance les candidats.

— L'étude de la fonction $\varphi : t \mapsto 2t^3 - t^2 + 1$ est souvent catastrophique : le tableau des variations de φ est faux, même si la dérivée est juste, les valeurs où elle s'annule n'apparaissent pas dans ce tableau, le signe de cette dérivée est aléatoire....

 Pour la représentation graphique, quelques points sont en général reliés par des segments !

— La recherche des points critiques est souvent confondue avec celle des zéros de la fonction.

— Lorsque l'énoncé parle d'extrema, il ne s'agit pas uniquement de maxima !

 Pour ceux qui donnent une réponse à la dernière question, seuls les maxima apparaissent.

— On remarque une grande confusion entre extremum local et extremum global.

— Beaucoup d'étudiants confondent condition nécessaire et condition suffisante : le fait que la Hessienne ait son déterminant nul n'entraîne pas que la fonction n'ait pas d'extremum local.

— L'argument de continuité pour l'existence d'extrema locaux pour la fonction f sur D est très souvent occulté.

— A la question **4.1.** certains étudiants cherchent les extrema de la fonction $x \mapsto x^2 + y^2 - 4$!

Exercice 2

Exercice très classique de recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle linéaire du second ordre et détermination de son expression à l'aide de fonctions usuelles.

— On voit parfois des choses étranges : comme $y(0)$ est une constante, $y'(0) = 0$ puis $y''(0) = 0$ et par suite, en remplaçant, $y(0) = 0$!

— La détermination de la relation de récurrence est globalement correctement traité.

La détermination de a_0 et a_1 est parfois surprenante : en prenant $n = 0$ dans $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on obtient $a_0 = 0$!

— Un grand nombre d'étudiants ont du mal à exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et a_{n-1}, connaissant l'expression de a_n en fonction de a_{n-1} et a_{n-2}, le facteur $n^2 - 1$ restant inchangé en passant de n à $n + 1$.

— De la relation $(n^2-1)\, a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, certains candidats reconnaissent une suite récurrente linéaire double et en déduisent : $a_n = A \left(\dfrac{n}{2(n^2-1)^2}\right)^n + B\left(-\dfrac{n}{2(n^2-1)^2}\right)^n$!

— Pour la récurrence, le fait que ce soit une récurrence double a gêné beaucoup de candidats.

Il est d'autre part fréquent de travailler avec des valeurs absolues, celles-ci n'apparaissant que lors de la conclusion.

— Peu de copies utilisent l'inégalité $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)\,!}$ pour obtenir que f est définie sur $\mathbb{R}$. En général, on utilise mal la limite du quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ en essayant d'utiliser la règle de d'Alembert.

— Ou alors : $f(x) \leqslant \sum |a_n|\, x^n \leqslant \sum \dfrac{x^n}{(n-1)\,!} = x\,\mathrm{e}^x$ et donc, f est définie sur $\mathbb{R}$!

— La dérivée de $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^x$ est trop souvent $z'(x) = y'(x)\,\mathrm{e}^x$.

— Certains candidats veulent résoudre (E) :

ils considèrent l'équation caractéristique $t^2 + \dfrac{1}{x}\, t - \dfrac{x^2+x+1}{2} = 0$, ce qui donne $y(x) = A\,t\,x + B\,x\,t\,\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)t}$!

Exercice 3

Exercice classique d'algèbre linéaire, sans grande difficulté, sur l'étude d'une matrice, la recherche de ses valeurs propres et la condition pour qu'elle soit la matrice d'un produit scalaire.
La matrice J, bien que très classique, pose encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
Si le rang de J et $\mathrm{Im}(J)$ sont souvent correctement donnés, la recherche d'une base de $\mathrm{Ker}(J)$ laisse souvent à désirer.
De façon plus précise :

— Le théorème du rang s'écrit parfois :
$\dim(\mathrm{Im}(J)) + \dim(\mathrm{Ker}(J)) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ ou $\dim(\mathrm{Im}(J)) + \dim(\mathrm{Ker}(J)) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n$.

— Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(J)$ certains candidats étudient l'équation $JX = X$!

— Le Théorème du rang n'affirme pas que $\mathrm{Im}(J)$ et $\mathrm{Ker}(j)$ sont supplémentaires...

— On voit très souvent apparaître un nouveau théorème spectral : « **si la matrice M est symétrique et si ses coefficients sont positifs, alors la matrice M est diagonalisable** »

— Le fait qu'une forme linéaire doit être à valeurs dans $\mathbb{R}$ est quasiment tout le temps oublié !

— Grosses difficultés pour démontrer la symétrie de f_r. L'égalité avec la transposée n'est pas naturelle du tout pour un réel.

Exercice 4

Exercice classique de probabilités utilisant des probabilités conditionnelles.
Les questions de cours ne sont pas toujours traitées correctement. C'est dommage.
Quelques erreurs :

— Le cours sur les variables aléatoires suivant une loi géométrique n'est pas toujours bien su.

— On trouve dans environ 50% des copies, les deux variables X_1 et X_2 sont indépendantes si, et seulement si : $\mathbb{P}(X_1 \cap X_2) = \mathbb{P}(X_1)\,\mathbb{P}(X_2)$.

— La variable aléatoire $X + Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^2$.

— La variable aléatoire $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre λ car $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$

Les dernières questions ont été rarement abordées.

*****

Luc Valette.