Rapport du jury - 2025 - PSI

Énoncé

EXERCICE 1

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est décroissante sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x \sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge.

On note alors, pour tout $x \in D$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Montrer, sans calculer sa dérivée, que la fonction f est décroissante sur D .

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

4. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5. Soit $J = \int_1^{+\infty} f(t) dt$. Montrer que l'intégrale J converge et prouver que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

EXERCICE 2

Question de cours

1. Soit u une fonction réelle de la variable réelle, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas.

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $P_k(X) = X^k$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E_n .

On considère l'application f qui à tout polynôme $P \in E_n$, associe le polynôme : $P''(X) - 4X P'(X)$, c'est-à-dire que :

$$f(P) = P'' - 4X P'$$

2. Étude de f

2.1. Justifier que f est un endomorphisme de E_n .

2.2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ de E_n . Expliciter cette matrice dans le cas $n = 3$.

- 2.3.** Prouver que f est diagonalisable et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.
- 2.4.** Soit P un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Montrer que $\lambda = -4 \deg(P)$.
- 2.5.** En déduire que pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme unitaire H_p , de degré p et tel que :

$$f(H_p) = -4p H_p$$

On rappelle qu'un polynôme est unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1.

3. Étude de H_p pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$

- 3.1.** Démontrer que l'on a :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(H'_p) = -4(p-1) H'_p$$

- 3.2.** En déduire que :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, H'_p = p H_{p-1}$$

et que :

$$\forall p \in \llbracket 2, n \rrbracket, H_p - X H_{p-1} + \frac{p-1}{4} H_{p-2} = 0$$

- 3.3.** Déterminer H_j pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

- 4.** On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\}$$

Soit alors G la fonction définie sur U par :

$$\forall m = (x, y, z) \in U, G(m) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|$$

- 4.1.** Établir que $m_0 = (a, b, c)$ est un point critique de G si, et seulement si, (a, b, c) est solution du système :

$$(S) \begin{cases} 2a(a-c)(a-b) = 2a-b-c & (L_1) \\ 2b(b-a)(b-c) = 2b-a-c & (L_2) \\ 2c(c-a)(c-b) = 2c-a-b & (L_3) \end{cases}$$

On ne cherchera pas à résoudre le système (S).

- 4.2.** On note $Q = (X-a)(X-b)(X-c)$.

- 4.2.1.** Déterminer les coefficients du polynôme Q .

- 4.2.2.** Montrer que (L_1) équivaut au fait que a est racine de $f(Q)$.

On admettra dans la suite que :

« (a, b, c) est solution du système (S) » **équivaut à** « $f(Q)$ admet pour racines a, b et c ».

- 4.3.** Prouver que si $m_0 = (a, b, c)$ est un point critique de G , alors $f(Q) = -12Q$.

- 4.4.** Déterminer alors le polynôme Q .

- 4.5.** En déduire les points critiques de G .

EXERCICE 3

Soient r un nombre réel non nul, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

On note enfin J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Exprimer J^2 en fonction de J .
2. En déduire, selon les valeurs de l'entier naturel ℓ , l'expression de J^ℓ .
3. Déterminer une base de $\text{Im}(J)$ et le rang de la matrice J .
4. Déterminer une base de $\text{Ker}(J)$.
5. Justifier que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Déterminer les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres de la matrice J .
7. Déterminer une matrice diagonale D semblable à J .
8. Démontrer que $\text{Im}(J)$ et $\text{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
9. Justifier que $M_r \in \text{Vect}(I_n, J)$.
10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer explicitement deux réels α_k et β_k tels que $(M_r)^k = \alpha_k I_n + \beta_k J$.
On exprimera le résultat sans le symbole $\sum$.
11. Montrer que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
12. Déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r .
13. **Dans cette question, on prend $n = 3$.**

13.1. Déterminer une matrice P inversible telle que :

$$\Delta_r = P^{-1} M_r P, \text{ où } \Delta_r = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ avec } \lambda_1 = \lambda_2.$$

13.2. Résoudre le système différentiel : $Y' = \Delta_r Y$.

13.3. En déduire les solutions du système différentiel : $Z' = M_r Z$.

Corrigé

Correction de l' EXERCICE 1

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)$ diverge grossièrement.

— Soit $x < 0$. On a : $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ car $-x\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ diverge grossièrement.

— Soit $x > 0$. On a : $n^2 u_n(x) = n^2 e^{-x\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance comparée (car $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$).

Ainsi, $u_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann), donc par comparaison de séries à termes positifs :

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge.

On trouve donc $D = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $-\sqrt{n} \leq 0$, la fonction u_n est décroissante sur D .

Par somme de fonctions décroissantes sur D , f est décroissante sur D .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\|u_n\| = \sup_{x \in [1, +\infty[} u_n(x) = u_n(1) \text{ par positivité et décroissance.}$$

Or, on sait que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$ converge, donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

4. On sait que :

— $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[1, +\infty[$.

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

Par le théorème de la double-limite, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} 0.$$

Donc,

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

5. On sait que :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est intégrable sur $[1, +\infty[$. En effet :

• c'est une fonction continue sur $[1, +\infty[$;

• $x^2 u_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance comparée, d'où $u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

— $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge simplement, car normalement, vers f sur $[1, +\infty[$;

— f est continue (donc continue par morceaux) sur $[1, +\infty[$. En effet :

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément (car normalement) vers f sur $[1, +\infty[$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[1, +\infty[$.

— $\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} |u_n(t)| dt$ converge.

En effet : soit $x \in [1, +\infty[$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, $\int_1^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} < e^{-\sqrt{n}} \leq u_n(1)$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ converge.

Par le théorème de l'intégration terme à terme, f est intégrable sur $[1, +\infty[$, d'où : J converge.

Ainsi :

$$J = \int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Correction de l'EXERCICE 2

Question de cours

1. La fonction $x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

2. Étude de f

2.1. — Soient $P, Q \in E_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' - 4X(\lambda P + Q)' = \lambda P'' + Q'' - 4XP' - 4XQ' \\ &= \lambda(P'' - 4XP') + Q'' - 4XQ' = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

— Soit $P \in E_n$; on a $\deg(P) \leq n$, puis :

$$\begin{aligned} \deg(f(P)) &= \deg(P'' - 4 \times P') \leq \max(\deg(P''), \deg(4 \times P')) \\ &\leq \max(\deg(P) - 2, 1 + \deg(P) - 1) \\ &\leq \deg(P) \leq n. \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in E_n$.

Finalement : $f \in \mathcal{L}(E_n)$.

2.2. On calcule : $f(P_0) = P_0'' - 4XP_0' = 0_{\mathbb{R}_n[x]} - 4X0_{\mathbb{R}_n[x]} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$.

$$\begin{aligned} f(P_1) &= P_1'' - 4XP_1' = 0_{\mathbb{R}_n[x]} - 4X \cdot 1 = -4X = -4P_1. \\ \forall k \geq 2, \quad f(P_k) &= P_k'' - 4XP_k' = k(k-1)X^{k-2} - 4 \times kX^{k-1} = k(k-1)P_{k-2} - 4kP_k. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -4 & \ddots & 6 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & -8 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -4n \end{pmatrix} \quad \text{soit, pour } n = 3 : \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

2.3. On a : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(P_k) \in \text{Vect}(P_{0,1}, R_k)$, ce qui explique que M est triangulaire supérieure. Ainsi, le spectre de f est l'ensemble des coefficients diagonaux de M .

Donc : $\text{Sp}(f) = \{-4k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Ainsi f possède $n + 1 = \dim(E_n)$ valeurs propres distinctes, donc f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

2.4. Soit P un vecteur propre, on a : $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Notons d le degré de P et a son coefficient dominant.

Ainsi λP est de degré d et de coefficient dominant λa .

De plus, par lecture de la matrice M , $f(P)$ est de degré d et de coefficient dominant $-4da$.

Or, $f(P) = \lambda P$, donc, par identification des coefficients en degré d : $\lambda a = -4da$.

Comme $a \neq 0$, il vient : $\lambda = -4d = -4 \deg(P)$.

2.5.

- **Unicité** : Soient H_n et I_n deux polynômes unitaires de de degré n vérifiant :

$$f(H_n) = -4nH_n \text{ et } f(I_n) = -4nI_n.$$

Ainsi $H_n \in E_{-4n}(f)$ et $I_n \in E_{-4n}(f)$. or, $\dim(E_{-4n}(f)) = 1$.

Donc H_n et I_n sont proportionnels.

Comme ces deux polynômes sont unitaires, ils sont égaux.

- **Existence** : L'espace propre $E_{-4n}(f)$ est de dimension 1. Notons H_n un polynôme unitaire tel que $E_{-4n}(f) = \text{Vect}(H_n)$. Évidemment, $f(H_n) = -4nH_n$. De plus, d'après **2.4**, $-4n = -4 \deg(H_n)$, donc $\deg(H_n) = n$.

3. Étude de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $f(H_n) = H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n$.

Donc $H_n'' = 4XH_n' - 4nH_n$ donc $H_n''' = 4H_n' + 4XH_n'' - 4nH_n'$.

Puis $f(H_n') = H_n''' - 4XH_n'' = 4H_n' + 4XH_n'' - 4nH_n' - 4XH_n''$.

Donc $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

3.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a montré que $H_n' \in E_{-4(n-1)}(f) = \text{Vect}(H_{n-1})$. Donc, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$, tel que $H_n' = \alpha_n H_{n-1}$. Or, le coefficient dominant de H_n' est n car celui de H_n vaut 1 et $\deg(H_n) = n$ et celui de

H_{n-1} est 1. Donc $\alpha_n = n$. Ainsi $H_n' = nH_{n-1}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n$.

Soit $n \geq 2$, on a donc $H_n' = nH_{n-1}$, puis $H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$.

Ainsi $n(n-1)H_{n-2} - 4XnH_{n-1} = -4nH_n$.

Comme $n \neq 0$, on en déduit : $H_n - XH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

3.3.

— H_0 est un polynôme unitaire de degré 0, donc $H_0 = 1$.

— On a : $f(P_1) = -4P_1$ donc P_1 est un polynôme unitaire de degré 1 appartenant à $E_{-4}(f)$, par unicité : $H_1 = P_1 = X$.

— D'après 3.2, on trouve :

$$H_2 = XH_1 - \frac{2-1}{4}H_0 = X^2 - \frac{1}{4}$$

$$H_3 = XH_2 - \frac{3-1}{4}H_1 = X^3 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{2}X$$

Conclusion : $H_0 = 1, H_1 = X, H_2 = X^2 - \frac{1}{4}, H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X.$

4.

4.1. Soit $m_0 = (a, b, c) \in U$. G est différentiable sur U et :

$$m_0 \text{ est un point critique de } G \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial x}(m_0) = 0, \frac{\partial G}{\partial y}(m_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial G}{\partial z}(m_0) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - \frac{1}{a-b} - \frac{-1}{c-a} = 0 \\ 2b - \frac{1}{a-b} - \frac{1}{b-c} = 0 \\ 2c - \frac{-1}{b-c} - \frac{1}{c-a} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a(a-c)(a-b) - (a-c) - (a-b) = 0 \\ 2b(b-a)(b-c) - (b-c) - (b-a) = 0 \\ 2c(c-a)(c-b) - (c-a) - (c-b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a(a-c)(a-b) = 2a - b - c \\ 2b(b-a)(b-c) = 2b - a - c \\ 2c(c-a)(c-b) = 2c - a - b \end{cases}$$

4.2. On note $Q = (X-a)(X-b)(X-c)$.

4.2.1. On développe :

$$Q = (X-a)(X-b)(X-c) = (X-a)(X^2 - (b+c)X + bc) = X^3 - (b+c)X^2 + bcX - aX^2 + a(b+c)X - abc$$

$$= X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc.$$

4.2.2. On calcule, à l'aide de la matrice M :

$$f(Q) = -12X^3 + 6X - (a+b+c)(-8X^2 + 2) + (ab+ac+bc)(-4X) - abc \cdot 0$$

$$= -12X^3 + 8(a+b+c)X^2 + (6-4ab-4ac-4bc)X - 2(a+b+c)$$

Ainsi :

$$f(Q)(a) = -12a^3 + 8a^3 + 8a^2b + 8a^2c + 6a - 4a^2b - 4a^2c - 4abc - 2a - 2b - 2c$$

$$= -4a^3 + 4a^2b + 4a^2c + 4a - 4abc - 2b - 2c$$

$$= 2(-2a^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2a - 2abc - b - c)$$

$$= 2(2a(-a^2 + ab + ac + 1 - bc) - b - c)$$

$$= -2(2a((a-b)(a-c) - 1) + b + c)$$

donc $2a(a-c)(a-b) = 2a - b - c \Leftrightarrow f(Q)(a) = 0$. De même, on a :

$$\begin{aligned} f(Q)(b) &= -12b^3 + 8ab^2 + 8b^3 + 8b^2c + 6b - 4ab^2 - 4abc - 4b^2c - 2a - 2b - 2c \\ &= -4b^3 + 4ab^2 + 4b^2c + 4b - 4abc - 2a - 2c \\ &= -2(2b^3 - 2ab^2 - 2b^2c - 2b + 2abc + a + c) \\ &= -2(2b(b-a)(b-c) - 2b + a + c) \end{aligned}$$

donc $2b(b-a)(b-c) = 2b - a - c \Leftrightarrow f(Q)(b) = 0$

$$\begin{aligned} f(Q)(c) &= -12c^3 + 8ac^2 + 8bc^2 + 8c^3 + 6c - 4abc - 4ac^2 - 4bc^2 - 2a - 2b - 2c \\ &= -4c^3 + 4ac^2 + 4bc^2 + 4c - 4abc - 2a - 2b \\ &= -2(2c^3 - 2ac^2 - 2bc^2 - 2c + 2abc + a + b) \\ &= -2(2c(c-a)(c-b) - 2c + a + b) \end{aligned}$$

donc $2c(c-a)(c-b) = 2c - a - b \Leftrightarrow f(Q)(c) = 0$.

4.2.3. D'après les calculs précédents, on a bien montré que :

$$(a, b, c) \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow f(Q)(a) = f(Q)(b) = f(Q)(c) = 0$$

4.3. Soit $m_0 = (a, b, c) \in U$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} m_0 \text{ point critique de } G &\Leftrightarrow f(Q)(a) = f(Q)(b) = f(Q)(c) = 0. \\ &\Leftrightarrow (X-a)(X-b)(X-c) \mid f(Q) \\ &\Leftrightarrow f(Q) \in \text{Vect}(Q) \text{ car } \deg(Q) = \deg(f(Q)) = 3. \\ &\Leftrightarrow Q \text{ est vecteur propre de } f \\ &\Leftrightarrow Q \in E_{-12}(f) \text{ d'après la question 2.4} \\ &\Leftrightarrow f(Q) = -12Q. \end{aligned}$$

4.4. Q est un polynôme unitaire, de degré 3, vérifiant $f(Q) = -12Q$.

D'après la question **2.5**, $Q = H_3$

4.5. D'après tout ce qui précède, les points critiques de G sont les triplets construits à partir des trois racines distinctes de H_3 .

$$\text{Or } H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X = X \left(X^2 - \frac{3}{4} \right) = X \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

L'ensemble des points critiques de G est donc :

$$\left\{ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \right\}$$

Correction de l'EXERCICE 3

1. $J^2 = nJ$.

2. On démontre la propriété « $J^\ell = n^{\ell-1}J$ » par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}^*$ sans oublier de préciser que par ailleurs : $J^0 = I_n$.

3. J est une matrice de rang 1 (toutes ses colonnes sont égales et non nulles) et $\text{Im}(J) = \text{Vect}(C_1)$ où C_1 est la première colonne de la matrice J .

4. D'après la question précédente, $\text{Ker}(J)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ est dans $\text{Ker}(J)$ si, et seulement si $\sum_{j=1}^n x_j = 0$ qui est l'équation de $\text{Ker}(J)$.

On en déduit que $X \in \text{Ker}(J) \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} \end{pmatrix}$, ce qui donne comme base de $\text{Ker}(J)$ la

famille :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, V_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice J est symétrique réelle donc, diagonalisable.

6. 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ et le sous-espace propre associé est $\text{Ker}(J)$. La deuxième (et dernière) valeur propre est $\text{tr}(J) = n$ et facilement, le sous-espace propre associé est $\text{Vect}(C_1)$.

7. On en déduit alors que J est semblable à $D = \text{diag}(0, \dots, 0, n)$ en utilisant la base $(V_2, \dots, V_n, C_1)$.

8. On peut remarquer que $\text{Ker}(J)$ et $\text{Im}(J) = \text{Vect}(C_1)$ sont orthogonaux (le produit scalaire de C_1 avec les vecteurs de base de $\text{Ker}(f)$ est nul) et donc, d'après le théorème du rang, supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

9. On remarque que $M_r = rJ + (1-r)I_n \in \text{Vect}(I_n, J)$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme J et I_n commutent, on utilise la formule du binôme de Newton :

$$(M_r)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} r^i (1-r)^{k-i} J^i.$$

On utilise les résultats initiaux pour obtenir ainsi :

$$(M_r)^k = (1-r)^k I_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (nr)^i (1-r)^{k-i} J = (1-r)I_n + \frac{((n-1)r+1)^k - (1-r)^k}{n} J.$$

11. La matrice M_r est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ puisque symétrique réelle.

12. D'après 5., il existe P une matrice inversible telle que $J = PDP^{-1}$. Donc, d'après la question 9., $M_r = P((1-r)I_n + rD)P^{-1}$.

La matrice M_r est donc semblable à la matrice $\Delta_r = \text{diag}(1-r, \dots, 1-r, (n-1)r+1)$.

Remarque : si on a choisi $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$, on trouve $\Delta_r = \text{diag}((n-1)r+1, 1-r, \dots, 1-r)$.

13. Ici, $n = 3$

13.1. Il vient donc $\Delta_r = \text{diag}(1 - r, 1 - r, 1 + 2r)$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ satisfait à la relation $J = PDP^{-1}$.

On a alors $M_r = P\Delta_r P^{-1}$ d'où aussi $\Delta_r = P^{-1}M_r P$.

13.2. Soit Y une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

$Y' = \Delta_r Y \iff Y : t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \exp(1 - rt) \\ \beta \exp((1 - r)t) \\ \gamma \exp((1 + 2r)t) \end{pmatrix}$, où α, β, γ sont trois réels quelconques. Par conséquent :

13.3.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, Z'(t) = M_r Z(t) &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = P \begin{pmatrix} \alpha \exp(1 - rt) \\ \beta \exp((1 - r)t) \\ \gamma \exp((1 + 2r)t) \end{pmatrix} \\ &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \exp(1 - rt) + \gamma \exp((1 + 2r)t) \\ -\alpha \exp(1 - rt) + \gamma \exp((1 + 2r)t) \\ -\beta \exp(1 - rt) + \gamma \exp((1 + 2r)t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où α, β, γ sont trois réels quelconques.

Commentaires généraux

Tout d'abord, répétons comme tous les ans les mêmes remarques générales que trop de candidats ne semblent pas respecter :

— Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées, voire illisibles par endroits (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examineur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.**

Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent. Nous avons même rencontré cette année des candidats qui utilisent leur propre numérotation différente de celle de l'énoncé...

Les copies quasiment illisibles sont lourdement pénalisées.

Enfin, l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

Nous insistons sur ces points qui défavorisent à coup sûr le candidat, même s'il n'y a pas dans le barème de points de présentation : le correcteur regarde la copie d'un œil moins bienveillant dans ce cas.

— Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

— De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent « le théorème spectrale » etc.

— Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

— De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

— Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...

— Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Cette année, nous avons choisi de poser uniquement trois exercices, le deuxième permettant de déterminer les extrema d'une fonction à plusieurs variables à l'aide de la diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

— Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité de chaque exercice du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée.

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PSI et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :
 - * Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
 - * On trouve encore trop d'équivalents à 0...
- Les quantificateurs, les symboles $\implies$, $\iff$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

Nous essayons de construire nos exercices de façon très progressive, seules les dernières questions étant parfois plus difficiles et sommes donc surpris lorsque des candidats négligent totalement un exercice.

Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons cette année dans ce rapport une correction succincte du sujet afin d'inciter les candidats à l'étudier attentivement en reprenant « à la main » les parties parfois rapidement rédigées.

Commentaires par exercice

Exercice 1

Exercice d'analyse mettant en jeu certains théorèmes du programme de deuxième année.

- Dans la première question, le résultat est souvent énoncé sans aucune justification. Lorsqu'il y en a, ça n'est pas une franche réussite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ et donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge !
- Certains candidats croient reconnaître une série géométrique, d'autres une série de Riemann !
- L'énoncé demandait de déterminer l'ensemble des x pour lesquels la série converge : après avoir démontré correctement que la série convergait pour les $x > 0$, il ne fallait pas oublier d'étudier le cas $x \leq 0$.
- Certains autres candidats tentent d'utiliser la règle de d'Alembert mais oublient que c'est la limite du quotient qu'il faut comparer à 1 et non le quotient.

- Pour montrer que f est décroissante, trop d'étudiants comparent $f(x)$ et $f(x+1)$. Très peu de copies évoquent les sommes partielles.
- Plutôt que de démontrer la convergence normale sur $[1, +\infty[$ beaucoup de candidats démontrent la convergence normale sur tout segment de cet intervalle.
- Certains candidats trouvent sans être choqués que $\|u_n\|_\infty = 0$.
- Le théorème de la double limite est souvent vu. Cependant, il est important de mentionner la convergence uniforme sur $[1, \infty[$ et non de dire « il y a convergence uniforme ».
- Le théorème d'intégration termes à termes semble totalement inconnu et pour ceux qui le connaissent, ses hypothèses restent très vagues.

Exercice 2

Exercice qui mélange de l'algèbre linéaire et des fonctions à plusieurs variables.

- La première question demande une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$: le bon résultat est très très rarement obtenu. Seules 10% des copies donnent le bon résultat !
- Écrire « l'ensemble de départ est le même que celui d'arrivée » sans aucune justification ne suffit pas pour conclure que f est un endomorphisme.
- De même, chercher l'image du polynôme nul ne prouve pas grand chose.
- Trop de candidats ont traité les questions **2.3.** et **2.4.** dans le cas $n = 3$.
- Une matrice triangulaire n'est pas forcément diagonalisable.
- On voit apparaître un nouveau théorème spectral : « toute matrice symétrique dont les coefficients sont positifs est diagonalisable »
- Des transitions étonnantes : $f(H_p) = -4 \deg(H_p) H_p \implies f(H'_p) = -4 \deg(H'_p) H'_p$!
- Rappelons que le polynôme nul n'est pas unitaire.
- A partir de la deuxième relation obtenue à la question **3.2.**, certains candidats reconnaissent une suite récurrence linéaire double et en déduisent H_p après avoir posé une équation caractéristique.
- La dérivée des fonctions $\ln|x-y|$ pose problème, mais comme la solution est donnée, tout le monde y arrive...
- Comment des candidats peuvent se tromper à la question **4.2.1** ? Nous ne comprenons pas !
- La question **4.2.2.** a été celle où les candidats ont le plus bluffé : à partir de résultats faux, on arrive à la bonne conclusion, calculs inextricables qui donnent le bon résultat...confusion entre implication et équivalence.

Exercice 3

Exercice d'algèbre linéaire classique qui débouche sur la résolution d'un système différentiel pour $n = 3$.

- Question 1. Quelques réponses fantaisistes, du style : $J^2 = 2J$... Bien que correcte, l'égalité $J^2 = J \times J$ n'était pas la réponse attendue.

- Question 2. Beaucoup de candidats ne justifient pas leur propos. Le cas $\ell = 0$ est rarement mentionné. Parfois, on prétend qu'une récurrence immédiate permet de montrer un résultat qui est en fait faux. Comme en philosophie, on ne peut pas faire d'un exemple une généralité : les relations $J^2 = nJ$ et $J^3 = n^2J$ ne suffisent pas à conclure que $J^\ell = n^{\ell-1}J$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$. Lorsque la conjecture a été prouvée par récurrence, l'ensemble annoncé dans la conclusion de la démonstration par récurrence n'est pas toujours cohérent avec le rang auquel a été faite l'initialisation. Les "récurrences immédiates" sont plus fréquentes dans les mauvaises copies et dans les plus courtes.
- Question 3. Le rang donné est parfois surprenant, rarement justifié. Dire que les colonnes sont égales ne suffit pas pour conclure que le rang vaut 1.
- Question 4. Si certains donnent une famille génératrice du noyau, beaucoup oublient de justifier la liberté. Le théorème du rang est souvent utilisé pour déterminer la dimension de $\text{Ker}(J)$, et il semble moins maltraité que les années précédentes dans sa version matricielle. La détermination d'une base du noyau reste cependant souvent problématique.
- Questions 5 et 11. La question donne parfois lieu à d'interminables calculs faux... la réponse tient en une ligne. Lorsque l'utilisation du théorème spectral a été repérée, on peut se réjouir de la présence presque systématique cette année du mot "réelle", mais se désoler du rajout du mot "positive"! On lit parfois que le polynôme $\chi_J = X^{n-1}(X - n)$ est scindé à racines simples.
- Question 6. Certains candidats calculent le polynôme caractéristique alors que le sujet fait tout pour l'éviter. Les calculs sont souvent malhonnêtes. Trop peu de candidats utilisent les questions précédentes pour déterminer les valeurs propres et tentent de calculer le polynôme caractéristique, sans succès, ce qui fait apparaître des valeurs propres loufoques, sans lien avec les questions précédentes (en particulier avec le rang de J).
- Question 7. Certains se trompent alors qu'ils ont les bonnes valeurs propres.
- Question 8. Question qui a souvent été source de confusions. Il est faux de prétendre que $\text{Ker}(J) \cap \text{Im}(J) = \emptyset$. Calculer le produit scalaire de $(1, \dots, 1)$ avec un seul des vecteurs de la base de $\text{Ker}(J)$ ne suffit pas à conclure que $\text{Im}(J) \perp \text{Ker}(J)$.
- Question 9. Assez bien traitée. On peut se poser des questions lorsque la question 9 n'est pas traitée mais que la question 10 commence par $M_r^k = (rJ + (1 - r)I_n)^k$: il est inconcevable que la notation Vect engendre une difficulté !
- Question 10. La formule est souvent maltraitée, notamment l'oubli du coefficient binomial, la somme partant de 1, oubli de dire que les matrices commutent. Les candidats seraient inspirés d'apprendre le cours plutôt que de faire d'improbables tours de magie... Le fait que l'exposant soit la lettre k a perturbé beaucoup de candidats (qui doivent avoir l'habitude d'indexer par k la formule du binôme de Newton) : plutôt que raturer quasiment tous les exposants de la somme, mieux vaut barrer proprement et réécrire correctement son calcul.
- Questions 13.2 et 13.3. Les quantificateurs sont presque toujours absents.

Luc Valette