

---

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

# MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

### RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

## EXERCICE 1

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles.  
On note, pour  $f \in E$ ,  $N_0(f) = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ .

### Questions de cours

1. Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction  $x \mapsto \arctan(x)$ .
2. En déduire le tableau des variations de la fonction  $\arctan$  ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaître sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.
3. Justifier que  $\arctan$  est élément de  $E$  et donner  $N_0(\arctan)$ .
4. Soit  $v$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .  
Calculer la dérivée de la fonction  $t \mapsto \arctan(v(t))$ .  
*On rappelle que la dérivée de la composée de deux fonctions  $u$  et  $v$  dérivables est la fonction définie par  $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$  sur un intervalle correctement choisi.*
5. Déterminer une expression simple de la fonction :  $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ .

\*\*\*\*\*

6. Soit  $f$  une fonction de  $E$ .
  - 6.1. Montrer que pour tout  $x$  réel, la fonction  $t \mapsto \arctan(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
  - 6.2. On pose, pour tout réel  $x$  :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2} dt.$$

Montrer que  $\Phi(f)$  appartient à  $E$ .

- 6.3. Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle  $[0, +\infty[$  pour l'étude de la fonction  $\Phi(f)$ .
7. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme  $\Phi$  de  $E$ .
8. Montrer que pour tout  $f \in E$ ,  $\Phi(f)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
9. Soit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $E$  qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $h$ .
  - 9.1. Justifier que  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - 9.2. Montrer que  $h$  appartient à  $E$ .
10. Soit  $f_0$  la fonction constante égale à 1 et  $g = \Phi(f_0)$ .
  - 10.1. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .  
*Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.*
  - 10.2. Pour tout réel  $x$  strictement positif, exprimer  $g'(x)$  sous forme intégrale.
  - 10.3. Pour tout réel  $x$  de  $]0, +\infty[$ , simplifier l'expression :  $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$ .

#### 10.4. Une autre expression de $g'$

10.4.1. On fixe  $x$ , réel de  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :  $F(T) = \frac{1}{(1+x^2 T)(1+T)}$ .

10.4.2. Montrer que sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ .

10.4.3. Donner alors l'expression de  $g'$  sur  $]0, +\infty[$ .

10.5. Donner le tableau des variations et l'allure de la courbe représentative de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .  
On précisera ses éventuelles asymptotes et son comportement au voisinage de 0.

## EXERCICE 2

Notations pour l'exercice :

- $i$  désigne le nombre complexe usuel vérifiant  $i^2 = -1$ .
- Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on notera  $E_n = \mathbb{C}_n[X]$ , le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $\mathbb{U}$  désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

### Questions préliminaires

1. Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $g = \operatorname{Re}(f)$  et  $h = \operatorname{Im}(f)$  ainsi  $f = g + ih$ .

Montrer que  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} dt$ .

2. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ . On suppose que l'on a :  $\forall z \in \mathbb{U}, P(z) = 0$ .

Justifier que  $P$  est le polynôme nul.

3. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ , montrer que  $z \in \mathbb{U}$  si et seulement si  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ .

4. Soient  $P = 1 + iX$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $\overline{P(e^{i\theta})}$ .

5. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Justifier que la trace de la matrice  $A$  est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

\*\*\*\*\*

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

6. Pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $E_n$ , on pose :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta}) d\theta.$$

6.1. Soient  $k$  et  $\ell$  deux entiers naturels de  $[[0, n]]$ . Évaluer  $\varphi(X^k, X^\ell)$ .

6.2. Soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $P, Q, R$  trois éléments de  $E_n$ . Montrer que l'on a :

- $\varphi(aP + Q, R) = \bar{a} \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$
- $\varphi(P, aQ + R) = a \varphi(P, Q) + \varphi(P, R)$
- $\varphi(Q, P) = \overline{\varphi(P, Q)}$ .

- 6.3.** Soit  $P \in E_n$ . Montrer que  $\varphi(P, P)$  est un réel positif ou nul.
- 6.4.** Soit  $P \in E_n$ . Prouver l'équivalence :  $\varphi(P, P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ .
- 6.5.** Soit  $Q_0$  un polynôme de  $E_n$  avec  $Q_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ . On note  $M = \sup_{z \in \mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$ .
- 6.5.1.** Calculer  $\varphi(Q_0, Q_0)$  à l'aide des coefficients de  $Q_0$ .  
*On pourra utiliser les questions 6.2 et 6.1.*
- 6.5.2.** Démontrer que  $M \geq 1$ .
- 6.5.3.** Prouver que  $M = 1$  si, et seulement si,  $Q_0 = X^n$ .

## EXERCICE 3

### Question de cours

- 1.** Soit  $(u)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+1} = au_n + b$  où  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .
- 1.1.** Exprimer, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  en fonction de  $n$ , de  $a$ , de  $b$  et de  $u_1$ .
- 1.2.** Préciser le comportement de  $u$  à l'infini.

\*\*\*\*\*

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

Un joueur lance successivement et de façon indépendante  $n$  boules au hasard dans  $N$  cases numérotées de 1 à  $N$ .

Chaque boule a la probabilité  $\frac{1}{N}$  de tomber dans chacune des  $N$  cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire  $T_n$  égale au nombre de cases non vides après  $n$  lancers.

- 2.** Déterminer en fonction de  $n$  et de  $N$  les valeurs que peut prendre  $T_n$ .
- 3.** Donner les lois de  $T_1$  et de  $T_2$ .

**Pour la suite, on prendra  $n \geq 2$ .**

- 4.** Déterminer les probabilités  $\mathbb{P}(T_n = 1)$  et  $\mathbb{P}(T_n = 2)$ .
- 5.** Calculer  $\mathbb{P}(T_n = n)$ .  
*On pourra distinguer les cas  $n \leq N$  et  $n > N$ .*
- 6.** Prouver que, pour tout  $k$  appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$  on a :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N} \mathbb{P}(T_n = k - 1).$$

- 7.** On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k) x^k.$$

- 7.1.** Montrer que  $G_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_n = k) x^k$ .

7.2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N} (x - x^2) G'_n(x) + x G_n(x).$$

7.3. En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(T_n) + 1.$$

7.4. En déduire la valeur de  $\mathbb{E}(T_n)$  et déterminer sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

7.5. Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires  $X_i = 1$  si la  $i$ ème case est pleine, 0 sinon.

## EXERCICE 4

Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
On dit que  $A$  est équitale si :

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, a_{ij} = a_{ik} a_{kj}.$$

1. Donner deux exemples de matrices équitales pour  $n = 3$ .
2. Déterminer l'ensemble des matrices  $A$  pour lesquelles :  $A$  est équitale et  $-A$  est équitale.
3. Montrer que si  $A$  est équitale, alors sa transposée  $A^T$  est aussi équitale.
4. On suppose que  $A$  est équitale, montrer que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{ii} = a_{jj}$ .

**On suppose désormais que  $A$  est une matrice équitale non nulle.**

5. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , calculer  $a_{kk}$ .
6. Soit  $B$  une matrice équitale non nulle. Montrer que  $A + B$  n'est pas équitale.
7. Montrer que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{ij} \neq 0$ .
8. Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , exprimer  $a_{ij}$  à l'aide de  $a_{i1}$  et  $a_{j1}$ .
9. **Quelques résultats remarquables**
  - 9.1. Montrer que  $A$  est de rang 1.
  - 9.2. Calculer  $A^2$ .
  - 9.3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
  - 9.4. Montrer que la matrice  $A$  est semblable à  $\text{diag}(n, 0, \dots, 0)$ .
  - 9.5. Montrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $J$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.
10. Démontrer que  $A$  est symétrique si, et seulement si,  $A$  est à coefficients dans  $\{-1, 1\}$ .
11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitales symétriques non nulles.
12. Si  $G$  est un sous-groupe fini de  $(\mathbb{K}^*, \times)$ , déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitales à coefficients dans  $G$ .
13. Déterminer toutes les matrices carrées équitales de taille 2 à coefficients dans le groupe  $\mathbb{U}_2$ .

**FIN**





