



---

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

---

# MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

## EXERCICE 1

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On note  $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à  $2n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , on note  $e_k = X^k$  et  $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$  la base canonique de  $E$ .

Pour tout couple de polynômes  $(P, Q)$  de  $E^2$ , on pose  $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$  et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

Soit  $L$  l'application définie sur  $E$  par :

$$\forall P \in E, L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt.$$

1. Montrer que  $L$  est une forme linéaire sur  $E$ .
2. Déterminer  $L(e_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ .
3. Déterminer la dimension de  $\text{Ker}(L)$ .
4. Prouver qu'il existe une base  $\mathcal{U}$ , que l'on ne cherchera pas à expliciter, de  $\text{Ker}(L)$ , dont le premier vecteur est  $e_1$ .
5. Montrer que :
  - i)  $\text{Vect}(e_0)$  et  $\text{Ker}(L)$  sont deux sous-espaces orthogonaux,
  - ii)  $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$ .
6. Soit  $\lambda$  un réel. On considère l'application  $T_\lambda$  définie sur  $E$  par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X.$$

- 6.1. Vérifier que  $T_\lambda$  est un endomorphisme de  $E$ .
- 6.2. Soit  $P \in E$ . Calculer  $(L \circ T_\lambda)(P)$ .
- 6.3. Déterminer la matrice de  $T_\lambda$  dans une base de  $E$  adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4. et 5.
- 6.4. Déterminer les valeurs propres de  $T_\lambda$ .
- 6.5. L'endomorphisme  $T_\lambda$  est-il diagonalisable ?
- 6.6. Justifier que  $T_\lambda$  est un automorphisme de  $E$ .
- 6.7. Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , préciser  $T_\alpha \circ T_\beta$ .
- 6.8. Déterminer  $T_\lambda^{-1}$ .

## EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  et qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

### 1. Questions de cours

- 1.1. Rappeler sans démonstration la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
- 1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.
- 1.3. Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires discrètes sur  $\Omega$ .  
Rappeler la définition de «  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes ».

2. Soit  $Y$  une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que  $X$  et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

2.1. Exprimer les événements  $\{Y = 0\}$  et  $\{Y = 1\}$  à l'aide d'événements  $\{X = j\}$  où  $j \in \mathbb{N}$ .

2.2. En déduire la loi de  $Y$  et son espérance.

On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

3. Soit  $Z$  une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que  $X$ , indépendante de  $X$  et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose  $T = XZ$ .

3.1. Préciser  $T(\Omega)$ .

3.2. Soit  $k$  un entier naturel.

En utilisant le système complet d'événements  $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$ , exprimer la probabilité  $\mathbb{P}(T = k)$  à l'aide de probabilités d'événements  $\{X = j\}$  et  $\{2X = j\}$  où  $j \in \mathbb{N}$ .

3.3. Déterminer la loi de  $T$ .

3.4. Quelle est la probabilité que  $T$  prenne des valeurs paires ?

On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

## EXERCICE 3

### Question de cours

1. Soit  $x$  un réel positif. Comparer  $x$  et  $x^2$ .

\*\*\*\*\*

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ .

On se propose d'étudier la série de terme général  $a_n = \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$ ,  $n \geq 1$ .

2. On pose pour tout  $t \geq 1$ ,  $\varphi(t) = \frac{\sin(t^\alpha)}{t}$ .

2.1. Justifier que la fonction  $t \mapsto \sin(t^\alpha)$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et déterminer sa dérivée.

2.2. Justifier que  $\varphi$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et déterminer  $\varphi'$ .

2.3. Montrer que l'on a :  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $|\varphi'(t)| \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2}$ .

2.4. En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\forall t \in [n, n+1], |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left( \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|.$$

3. On pose, pour tout  $n \geq 1$  :  $u_n = \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$ .

Prouver que l'on a :  $\forall n \geq 1, |u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ .

4. **Convergence de l'intégrale**  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

4.1. Démontrer que  $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$  converge.

6. En déduire que la série de terme général  $u_n$  converge.

7. Prouver que la série de terme général  $u_n - a_n$  converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.

9. **On suppose que la série  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  est convergente.**

9.1. Montrer qu'alors la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$  est convergente.

*On pourra utiliser la question de cours.*

9.2. Prouver que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$  converge.

On procédera comme à la question 4.2.

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$  est convergente.

Conclure sur la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} a_n$ .

*On pourra utiliser la formule de duplication :  $\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$ .*

## EXERCICE 4

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $E$ .

On note :  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ , où  $a_p \neq 0$  et  $b_q \neq 0$ .

Prouver que la série  $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$  est absolument convergente.

2. On pose pour tous  $P$  et  $Q$  dans  $E$  :  $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$ .

2.1. Montrer que :  $(S|S) = 0 \iff S$  est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

### 3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$  et sa somme.

3.2. Justifier que la série  $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$  converge pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

3.3. Exprimer  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$  à l'aide de la fonction  $f$  et en déduire que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3.4. Soit  $x > 0$ . Exprimer à l'aide des fonctions usuelles,  $g(x)$ ,  $g'(x)$  et  $g''(x)$ .

3.5. Soit  $\alpha$  un entier naturel, on pose  $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$ .

Calculer  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$ .

*On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de  $x$  bien choisie.*

On admettra que  $S_3 = 26$  et  $S_4 = 150$ .

4. On cherche à calculer la distance du vecteur  $X^2$  au sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_1[X]$  dans  $E$  muni du produit scalaire défini dans la question 2.

4.1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $X^2 - aX - b$  soit orthogonal à 1 et à  $X$ .

4.2. Prouver que l'ensemble  $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

**FIN**





