
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$: $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. Calcul d'une somme

1.1. Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{2n}$.

1.2. En remarquant que $(1 + X)^{2n} = (1 + X)^n(1 + X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

1.3. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.

On utilisera la question 1.3 pour simplifier le résultat.

4. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible}\}$.

EXERCICE 2

On note $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $(x, t) \in [0, 1]^2$, on note $\min(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans \mathbb{R} , suivant les valeurs de α , l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.

2. Soient $h \in E$ et $a \in [0, 1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et déterminer sa dérivée.

3. Cas particuliers

3.1. Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

3.2. Calculer $\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt$.

3.3. Soit x un réel de $[0, 1]$, exprimer $\int_0^1 \min(x, t) dt$ en fonction de x .

4. Soit $f \in E$.

4.1. Justifier que $F : x \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $F'(x)$.

4.2. Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.

4.3. Démontrer alors que F est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et montrer que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E , on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

5. Montrer que T est un endomorphisme de E .

6. L'application T est-elle injective ?

7. On pose $A = \{G \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\}$.

7.1. Montrer que $\text{Im}(T) \subset A$.

7.2. Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.

7.3. Déterminer $\text{Im}(T)$.

8. Recherche des éléments propres de T

8.1. Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T , alors λ est strictement positive. On pourra utiliser la question 4.

8.2. Déterminer les valeurs propres de T . On pourra aussi utiliser la question 4.

8.3. Pour chaque valeur propre de T , déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On identifie dans tout l'exercice $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n .

Pour p et q deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note A^\top la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, transposée de la matrice A .

On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X_1 et X_2 de \mathbb{R}^n est : $(X_1|X_2) = X_1^\top X_2$ et que $\|X_1\|^2 = X_1^\top X_1$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs **linéairement indépendants** de \mathbb{R}^n .

On définit la matrice $M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha x_i x_j + \beta y_i y_j$,

où α et β sont deux réels et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Enfin, on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est M .

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $U_X = X X^\top$.

2.1. Justifier que $U_X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire son terme général. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

2.2. Déterminer le rang de U_X puis une base de son image.

2.3. Prouver que $\text{Ker}(U_X)$ et $\text{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

2.4. Prouver que $\text{Ker}(U_X)$ et $\text{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

- 2.5. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X .
- 2.6. On note u_X l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice U_X . Déterminer la matrice de u_X dans une base adaptée à la décomposition de la question 2.4.
3. **Dans le cas particulier** où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, déterminer les valeurs propres de la matrice M .
En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice M .
4. **On revient au cas général** et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelles que soient les valeurs de α et de β .
- 4.1. On note $F = \text{Vect}(X, Y)$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice M .
- 4.1.1. Déterminer MX .
- 4.1.2. En déduire que F est stable par f .
- 4.2. Justifier que F^\perp est aussi stable par f et déterminer l'endomorphisme induit par f sur F^\perp .
- 4.3. On note $G = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \|X\|^2 & \alpha (X|Y) \\ \beta (X|Y) & 1 + \beta \|Y\|^2 \end{pmatrix}$.
- 4.3.1. Justifier que G est la matrice de l'endomorphisme induit sur F par f dans la base (X, Y) .
- 4.3.2. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.
- 4.3.3. Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que G est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont réelles.
- 4.3.4. Déterminer les valeurs propres de G .
- 4.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice M .

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.

On pose, lorsque cette intégrale existe, $\gamma_n = \int_0^1 \frac{1 - t^{1/n}}{(1 - t)^{1+1/n}} dt$.

- 1.1. Soit α un réel strictement positif.

1.1.1. Rappeler un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto (1 + h)^\alpha$.

1.1.2. En déduire un équivalent, au voisinage de 1, de $t \mapsto 1 - t^\alpha$.

- 1.2. Soit β un réel.

Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_0^1 \frac{1}{(1 - t)^\beta} dt$ converge.

- 1.3. Justifier l'existence de γ_n pour tout $n \geq 2$.

2. Démonstration d'un encadrement

- 2.1. Démontrer que l'on a :

- pour tout réel t : $1 + t \leq e^t$,
- pour tout réel t négatif : $e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2}$.

2.2. On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel u : $U_m = \sum_{k=0}^m \frac{u^k}{k!}$.

Soit p un entier naturel non nul.

On suppose que : $\forall u \leq 0, U_{2p-1} \leq e^u \leq U_{2p}$.

2.2.1. Démontrer que : $\forall u \leq 0, U_{2p+1} \leq e^u$.

2.2.2. Démontrer également que : $\forall u \leq 0, e^u \leq U_{2p+2}$.

2.3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de e^u lorsque u est un réel négatif ou nul.

3. Démontrer que l'on a, pour tout $t \in]0, 1[$, pour tout $n \geq 2$ et tout $p \geq 1$:

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n} \ln(t) \right)^k \leq 1 - \exp\left(\frac{1}{n} \ln(t) \right) \leq 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n} \ln(t) \right)^k.$$

4. Prouver que, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt$ existe.

On rappelle que $\ln(t)$ est équivalent à $t - 1$ au voisinage de 1.

5. Démontrer que l'on a pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt - \frac{1}{2n^2} \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt \leq \gamma_n \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt$$

6. Soit p un entier naturel non nul. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt \right)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

7. Prouver alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$.

8. Prouver que, pour tout entier naturel p , l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t) t^p dt$ existe.

9. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel p : $\int_0^1 -\ln(t) t^p dt = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. Démontrer que : $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^2}$.

11. Prouver enfin que : $\gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On admettra le résultat : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN

