



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Questions préliminaires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Vérifier que $\varphi : t \mapsto t^n$ est une fonction convexe sur $]0, 1[$.
2. Écrire l'inégalité de convexité de *Jensen* pour cette fonction.
3. Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
 - 3.1. Déterminer un polynôme annulateur de J de degré 2.
 - 3.2. En déduire les valeurs propres possibles de $I_p + J$.
 - 3.3. Justifier alors que la matrice $I_p + J$ appartient à $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $I_p + J$ est une matrice symétrique réelle définie positive.

* * * * *

Soient n et r deux entiers naturels avec $n \geq 2$ et $r \geq 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $(\alpha_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ de probabilités respectives $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ avec : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_j \in]0, 1[$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite au-dessus, ce qui définit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note X_j la variable aléatoire telle que $X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, et pour tout $\omega \in \Omega$:

- $X_j(\omega) = 0$ si α_j est obtenu au moins une fois à l'issue de ces n épreuves,
- $X_j(\omega) = 1$ sinon, c'est-à-dire si α_j n'est jamais obtenu.

Enfin, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

4. Une expression de l'espérance de X

- 4.1. Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Déterminer la loi de X_j .
- 4.2. Exprimer la variable aléatoire X à l'aide des variables $(X_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$.
- 4.3. Démontrer alors que l'espérance de la variable aléatoire X est : $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$.

5. La suite de l'exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_j pour lesquelles l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est minimale.

Cela revient à dire que l'on cherche un minimum pour la fonction $f : (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mapsto \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$ sous la contrainte :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^r x_j = 1.$$

On pose $U = \left\{ (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}, \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, x_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1 \right\}$.

- 5.1. Représenter graphiquement U dans le plan, c'est-à-dire dans le cas où $r = 3$.
- 5.2. Justifier que U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{r-1}$.

5.3. Déterminer une fonction h , définie sur U , des $r - 1$ variables $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket}$, telle que :

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \mathbb{E}(X).$$

5.4. Prouver que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

5.5. Recherche des points critiques de h

5.5.1. Soient $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ et $m = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$.

Déterminer la j -ième coordonnée du vecteur gradient de la fonction h en m .

5.5.2. Déterminer l'unique point critique b de h sur U .

5.6. Conclusion

5.6.1. Écrire la matrice Hessienne de h en b .

5.6.2. Démontrer alors que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ admet un minimum local pour } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

On pourra utiliser une question préliminaire.

5.6.3. En utilisant la convexité de la fonction φ définie dans la question préliminaire, démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ est minimale si, et seulement si, } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

EXERCICE 2

Question de cours

1. Rappeler, sans démonstration, les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge.

Lorsqu'il y a convergence, on note $\zeta(x)$ sa somme.

2. Rappeler, sans démonstration, la somme et l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} t^n$.

* * * * *

On rappelle que si f est une fonction infiniment dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors, pour tout entier naturel p , $f^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de la fonction f avec la convention $f^{(0)} = f$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note, lorsque cela existe :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \text{ et, pour } k \geq 2, E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

3. Justifier l'existence de $E_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Étudier la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x-n)^k}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^k}$.

4.2. En déduire l'existence de $E_k(x)$ pour tout $k \geq 2$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

5.1. Démontrer que la fonction E_k est 1-périodique.

5.2. Étudier la parité de la fonction E_k .

6. Une relation de récurrence

6.1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad E'_k(x) = -k E_{k+1}(x).$$

6.2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que :

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}.$$

7. Montrer que pour tout x de $] -1, 1[$ et pour tout entier naturel non nul n , la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{n^{k+1}}$ converge et calculer sa somme.

8. Établir que pour tout $x \in] -1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

9. Montrer que pour tout x non nul de $] -1, 1[$, on a :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}.$$

Le théorème utilisé sera cité avec précision en vérifiant ses hypothèses avec soin.

10. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in] -1, 1[, x \neq 0$,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-k},$$

avec la convention $\binom{m}{p} = 0$ si $p > m$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

À tout n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n-1}$, c'est-à-dire que $a_1 \neq 0$, on associe la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1.1. Justifier que M est diagonalisable.

1.2. Déterminer le rang de la matrice M .

1.3. Justifier que 0 est valeur propre et donner son ordre de multiplicité.

1.4. Démontrer alors que la matrice M possède deux valeurs propres non nulles (éventuellement égales) que l'on notera λ_1 et λ_2 .

1.5. Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

1.6. Soit λ un réel non nul.

En résolvant le système $MX = \lambda X$ où X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, montrer que λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0.$$

1.7. Déterminer une base des sous-espaces propres de M associés à λ_1 et λ_2 .

1.8. Expliciter une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

On précisera la matrice diagonale obtenue.

2. Étude du cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2.1. Montrer que :

$$M \text{ n'est pas diagonalisable si, et seulement si, } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \end{cases}$$

2.2. Donner un exemple de matrice M non diagonalisable dans le cas où $n = 3$.

FIN

