

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de cinq parties indépendantes.

- Les données utiles à la résolution du sujet figurent en fin de chaque partie.
- Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le ou la candidat(e).
- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans l'évaluation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fausse ne sont pas comptabilisés.

Autour de l'hélium

L'hélium He est le deuxième élément chimique de la classification périodique. Le mot hélium a été construit à partir du grec *Helios* (Soleil). C'est l'élément le plus abondant de l'Univers après l'hydrogène, et l'un des constituants principaux du Soleil.

À température et pression ambiantes, l'hélium est un gaz très léger, parfaitement incolore, inodore et chimiquement inerte. Ses propriétés physiques uniques permettent ou améliorent de nombreuses applications dans l'industrie, la synthèse et la recherche. Ce sujet aborde quelques propriétés, applications ou expériences liées à cet élément.

Partie I – L'hélium, un gaz « rare » dans notre atmosphère

L'hélium est produit en permanence dans la croûte terrestre par désintégration radioactive de l'uranium et d'autres éléments. Il se fraie ensuite un chemin vers l'atmosphère. Pourtant, la concentration d'hélium dans l'atmosphère terrestre est très faible. On en propose une interprétation dans cette partie.

Q1. Quels sont les deux principaux constituants de l'atmosphère terrestre ? Dans quelles proportions ?

La Terre est supposée sphérique, de centre O, de masse M_T et de rayon R_T . Considérons un atome d'hélium dans l'atmosphère terrestre, assimilé à un point matériel P de masse m . Ce point matériel est soumis uniquement à la force gravitationnelle $\vec{F}$ due à la Terre. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Q2. Exprimer la force $\vec{F}$, ainsi que l'énergie potentielle E_p dont elle dérive. On prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini.

Q3. Exprimer l'énergie mécanique E_m du point matériel P. Justifier que celle-ci se conserve.

Q4. Montrer que le mouvement de P est plan. Le point P étant alors repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) , démontrer que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Cette constante sera notée C dans la suite.

Q5. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r). \quad (1)$$

On précisera l'expression de la fonction $E_{p,\text{eff}}(r)$ en fonction de m , M_T , r , C et de G .

Q6. Tracer, en la justifiant, la courbe représentative de $E_{p,\text{eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point P peut « échapper » à l'attraction de la Terre, c'est-à-dire se trouver en état de diffusion.

Q7. La vitesse de libération v_ℓ est la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un corps depuis la surface d'un astre pour qu'il échappe définitivement à son attraction gravitationnelle. En déduire l'expression de v_ℓ en fonction de G , M_T et de R_T . Calculer numériquement v_ℓ (aide numérique : $\sqrt{1,4} \approx 1,2$).

Pour décrire l'atmosphère terrestre, on utilise le modèle du gaz parfait.

Q8. Énoncer les hypothèses du modèle du gaz parfait.

On définit la vitesse quadratique moyenne u d'un gaz parfait d'hélium par :

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{He}}}}, \quad (2)$$

avec M_{He} sa masse molaire et T sa température. On admet que les atomes d'hélium peuvent s'échapper de l'attraction de la Terre si la vitesse quadratique moyenne est supérieure au dixième de la vitesse de libération.

Q9. En prenant $T = 300 \text{ K}$, calculer numériquement u et conclure quant à la faible quantité d'hélium présente dans l'atmosphère terrestre (aide numérique : $\sqrt{1,8} \approx 1,3$).

Données pour la partie I

Constante de gravitation universelle : $G = 7,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Rayon de la Terre : $R_T = 6,0 \cdot 10^6 \text{ m}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,0 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Masse molaire de l'hélium : $M_{\text{He}} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

Partie II – Le laser hélium-néon

Un laser (*light amplification by stimulated emission of radiation*) est constitué d'un milieu matériel dans lequel l'amplification de la lumière est possible, d'un système de pompage qui fournit de l'énergie à ce milieu et d'une cavité optique. Le premier laser a vu le jour en 1960. Les années suivantes ont vu naître une grande variété de lasers, fonctionnant avec des milieux et des longueurs d'onde de plus en plus diversifiés. De nos jours, cette « curiosité de laboratoire » est devenue un objet courant de la vie quotidienne.

Q10. Citer trois applications des lasers dans les domaines de votre choix : vie quotidienne, industrie, médecine, recherche...

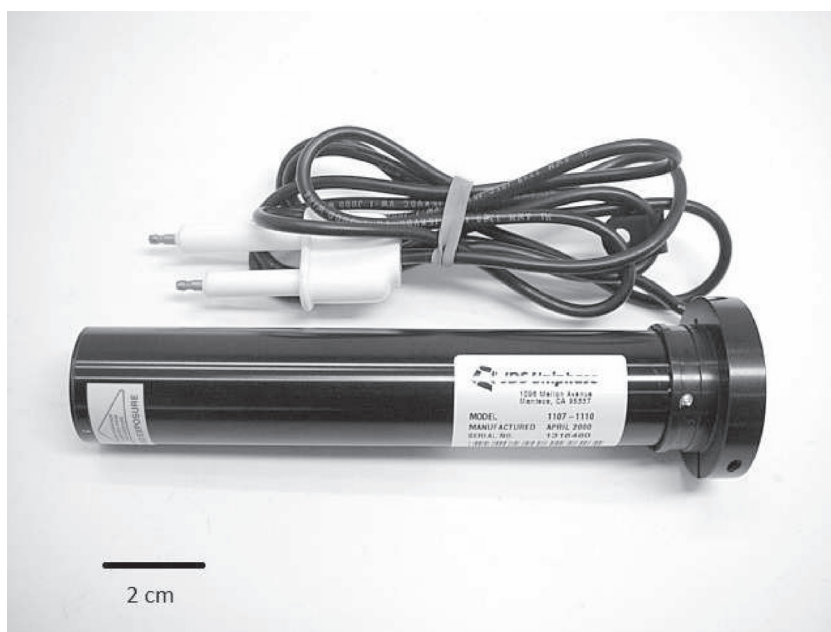


Figure 1 – Photographie du laser He-Ne 1107/P (JDS Uniphase)

Les lasers usuels utilisés en travaux pratiques sont des lasers à gaz de type hélium-néon. Ils émettent en continu un faisceau de lumière rouge de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, correspondant à une transition entre deux niveaux d'énergie du néon. On considère que l'onde lumineuse se propageant dans la cavité optique, de longueur L selon l'axe x et assimilée au vide, adopte une structure d'onde stationnaire. Le champ électrique de cette onde s'écrit alors :

$$E(x, t) = f(x) \sin(\omega t). \quad (3)$$

Les miroirs placés aux extrémités de la cavité en $x = 0$ et en $x = L$ sont assimilés à des conducteurs parfaits.

- Q11.** Par des considérations énergétiques, justifier que le champ électrique au sein d'un conducteur parfait est nul.
- Q12.** Redémontrer l'équation de d'Alembert satisfaite par le champ électrique dans une région vide de charges et de courants ; on fera apparaître la célérité de la lumière dans le vide c . En déduire l'équation différentielle satisfaite par la fonction f .
- Q13.** On admet la continuité de $E(x, t)$ en $x = 0$ et en $x = L$. Résoudre cette équation différentielle, puis exprimer les fréquences propres ν_n des modes pouvant exister dans la cavité, quantifiées par un entier n , en fonction de la longueur L de la cavité et de c . Déterminer ensuite l'Intervalle Spectral Libre, défini comme l'écart en fréquence entre deux modes voisins :

$$\text{ISL} = \nu_{n+1} - \nu_n. \quad (4)$$

- Q14.** Calculer l'ordre de grandeur de l'ISL du laser 1107/P JDS Uniphase (voir **figure 1**). La valeur obtenue est-elle cohérente avec la spécification du fabricant, à savoir 1 090 MHz ?

On propose un protocole expérimental permettant de mesurer la longueur d'onde λ d'un laser He-Ne. On fait passer le faisceau laser à travers un petit trou circulaire de rayon R . Sur un écran placé à une distance d du trou, on observe une figure de diffraction constituée d'une tache brillante, dite tache d'Airy, entourée de cercles concentriques de plus faible luminosité (voir **figure 2**).

On admet que les rayons des cercles sombres sont liés aux zéros de la fonction :

$$g(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cos(\pi x t) dt. \quad (5)$$

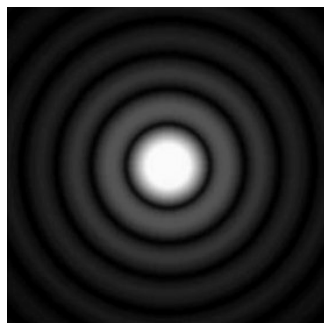


Figure 2 – Tache d'Airy

Les **questions Q15 et Q17** sont à traiter en langage Python. On supposera le module `numpy` déjà importé via la commande suivante :

```
import numpy as np
```

On pourra ainsi utiliser les fonctions usuelles de ce module.

On propose d'écrire une fonction Python g d'argument un flottant x et retournant la valeur de $g(x)$ via la méthode des rectangles.

```

1  def airy(x,t):
2      return (np.sqrt(1-t**2)*np.cos(np.pi*x*t))
3
4  def g(x):
5      S = ...                                # À COMPLÉTER
6      T = np.linspace(-1,1,201)
7      # tableau de 201 valeurs régulièrement réparties dans l'intervalle [-1,1]
8      for k in T:
9          S = S + ...                        # À COMPLÉTER
10     return ...                            # À COMPLÉTER

```

Q15. Compléter les lignes 5, 9 et 10 de ce programme.

On représente sur la **figure 3** la courbe représentative de g sur l'intervalle $x \in [-5, 5]$.

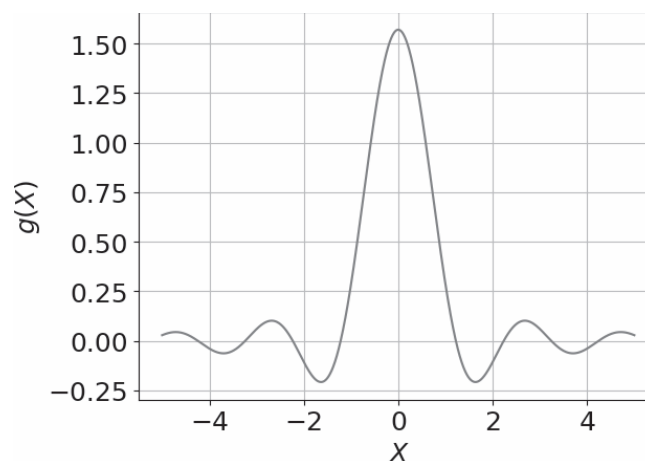


Figure 3 – Allure de la fonction $g(x)$

Q16. Vérifier par le calcul une valeur particulière de g . On pourra utiliser la primitive fournie en fin de partie.

On cherche à mettre en œuvre une méthode dichotomique afin de calculer la plus petite valeur de x positive, solution de l'équation $g(x) = 0$, à 10^{-2} près. On propose les lignes de commande suivantes :

```

1  def h(a,b,eps):
2      while abs(b-a) > 2*eps:
3          milieu = (a+b)/2
4          if g(a)*g(milieu) > 0:
5              ... = ...                        # À COMPLÉTER
6          else:
7              ... = ...                        # À COMPLÉTER
8          return ((a+b)/2)
9
10 print(h(... , ... , ...))                  # À COMPLÉTER

```

Q17. Compléter les lignes 5, 7 et 10 de ce programme.

Cette fonction fournit le résultat suivant : 1, 22. On admet alors que le diamètre de la tache d'Airy a pour expression :

$$\phi = 1,22 \frac{\lambda d}{R} . \quad (6)$$

En choisissant un trou de rayon $R = 50 \mu\text{m}$, et en plaçant l'écran à une distance $d = 2,000 \text{ m}$ du trou, on mesure une tache d'Airy de diamètre $\phi = 3,2 \text{ cm}$. On obtient (calcul non demandé) $\lambda = 656 \text{ nm}$. On donne les incertitudes-types expérimentales : $u(R) = 2 \mu\text{m}$, $u(d) = 0,005 \text{ m}$, $u(\phi) = 0,2 \text{ cm}$.

Q18. Exprimer littéralement l'incertitude-type $u(\lambda)$ en fonction de λ , R , d , ϕ , $u(R)$, $u(d)$ et de $u(\phi)$. Sachant que $u(\lambda) = 49 \text{ nm}$, comparer la valeur expérimentale de λ à la valeur attendue (632,8 nm) via le calcul d'un écart normalisé (z-score) et conclure.

Données pour la partie II	
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	
Identité vectorielle :	$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$
Primitive utile :	$\int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t}{2}$

Partie III – De l'hélium pour détecter les fuites

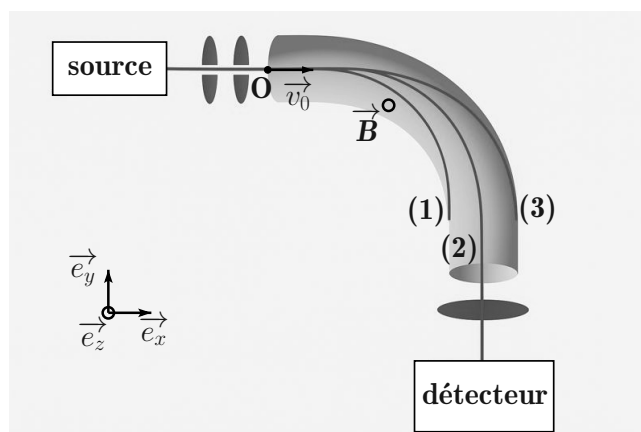


Figure 4 – Schéma de principe du spectromètre de masse

L'utilisation d'hélium pour la détection de fuites est un système qui a fait ses preuves dans de nombreux secteurs d'activité. L'hélium étant l'élément le plus léger après l'hydrogène, il pénètre rapidement dans les plus petites fuites, alors que les éléments plus lourds n'y parviennent pas. Le composant à tester est installé à l'intérieur d'une chambre à vide, puis mis sous pression avec un gaz traceur, composé d'air et d'hélium. L'utilisation d'un détecteur de fuite à spectromètre de masse, schématisé sur la **figure 4**, permet d'obtenir une mesure quantitative du débit total en raison de toutes les fuites de la pièce en cours de test. Le gaz traceur qui pénètre dans le spectromètre de masse est ionisé et dirigé dans un tube courbe plongé dans un champ magnétique. Pour une valeur donnée du champ magnétique, seuls les ions hélium traversent, les autres sont détruits. Le courant électrique produit par le flux d'ions hélium est mesuré pour quantifier la fuite.

À l'instant initial $t = 0$, un ion non relativiste de charge $e > 0$, de masse m et de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, arrive au point O, pris comme origine du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Cet ion entre alors dans un tube où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire, de direction $\vec{e}_z$ et de norme B . On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen, son poids étant négligé.

Q19. Montrer que la trajectoire de l'ion est contenue dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Q20. Justifier que le mouvement de l'ion est uniforme. Préciser le sens du champ $\vec{B}$ permettant d'obtenir l'une des trajectoires illustrées sur la **figure 4**.

Q21. Déterminer deux équations différentielles reliant les composantes de la vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de l'ion à leurs dérivées par rapport au temps. On posera $\omega = eB/m$.

Q22. On introduit la variable complexe $\underline{u} = v_y + jv_x$, avec $j^2 = -1$. Démontrer que la variable $\underline{u}$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d\underline{u}}{dt} - j\omega \underline{u} = 0. \quad (7)$$

Q23. Résoudre cette équation différentielle en tenant compte des conditions initiales. En déduire l'expression des composantes $v_y(t)$ et $v_x(t)$ de la vitesse de l'ion.

Q24. Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

Q25. Montrer que la trajectoire de l'ion est circulaire ; expliciter le rayon R de sa trajectoire en fonction de B , e , m et de v_0 .

Q26. On suppose que les ions présents dans le gaz traceur ont **la même charge** et **la même énergie cinétique initiale**. Associer les trajectoires respectives (1), (2) et (3) du schéma de la **figure 4** aux différents ions présents : ions hélium / ions légers (dihydrogène, hélium 3) / ions lourds (diazote, dioxygène, dioxyde de carbone, argon).

Q27. Calculer numériquement la durée de passage τ des ions hélium dans la zone de champ $\vec{B}$, assimilable à un quart de cercle.

Q28. Le rayon R est généralement de l'ordre de quelques centimètres. Était-il pertinent de ne pas tenir compte d'effets relativistes ? Justifier.

Données pour la partie III

Masse molaire de l'hélium : $\mathcal{M}_{\text{He}} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Norme du champ magnétique dans le tube courbe : $B = 0,10 \text{ T}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Partie IV – Des bulles de savon remplies d'hélium

L'hélium étant plus léger que l'air, il est utilisé pour gonfler des dirigeables et des ballons-sondes, notamment pour la météorologie, ou même le ballon soulevant la vasque olympique à l'occasion des Jeux Olympiques de Paris 2024. On propose de former de petits ballons d'hélium dans l'expérience ludique illustrée sur la **figure 5**. En soufflant de l'hélium au moyen d'une aiguille sur un cadre circulaire préalablement trempé dans une solution d'eau savonneuse, on génère un train de bulles de savon remplies d'hélium jusqu'à l'éclatement du film de savon. La forme des bulles obtenues résulte d'une minimisation de leur surface, à volume d'hélium fixé.

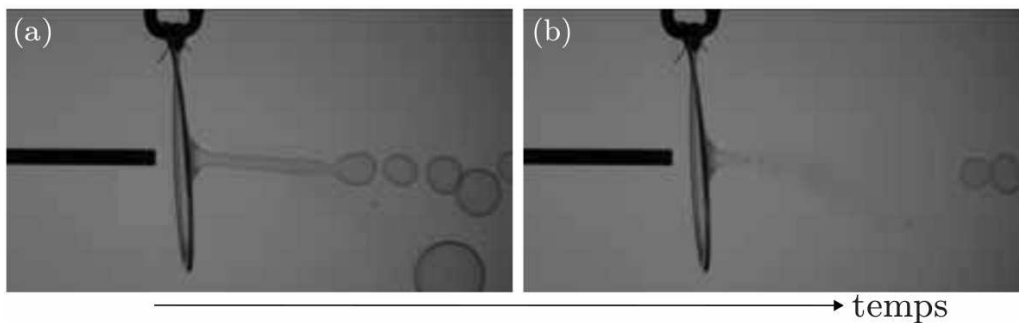


Figure 5 – Photographie de l'expérience

Q29. Considérons deux bulles de même volume V_0 , l'une sphérique de rayon r et de surface S_s , l'autre cubique de côté a et de surface S_c . Montrer que $S_s/S_c = (\pi/6)^{1/3} < 1$. Commenter ce résultat.

La taille des bulles est principalement contrôlée par le rayon de l'aiguille choisie. L'expérience montre que les grosses bulles, de rayon supérieur à un rayon critique $r_c = 6$ mm montent, alors que les petites bulles de rayon inférieur à r_c descendent. Pour interpréter cette observation, on assimile la bulle à une boule d'hélium de rayon r et de masse volumique ρ_{He} , entourée d'une coque liquide d'épaisseur $e \ll r$ et de masse volumique ρ_ℓ . Cette bulle est notamment soumise à la poussée d'Archimède, force verticale ascendante de norme égale au poids d'une boule d'air de rayon $r + e \simeq r$.

Q30. Faire le bilan des forces appliquées à une bulle de rayon critique r_c . En déduire l'expression de e en fonction de r_c et des masses volumiques utiles, puis la calculer numériquement.

L'épaisseur des bulles est supposée voisine de celle du film de savon sur le cadre circulaire : on souhaite le vérifier par une méthode interférométrique. Une source de lumière S ponctuelle et monochromatique, de longueur d'onde λ , éclaire le film liquide d'épaisseur e supposée constante et uniforme. On s'intéresse aux interférences entre les rayons (1) et (2) tracés sur la **figure 6**. Le film liquide est assimilé à un milieu non dispersif d'indice optique n_ℓ ; l'air est assimilé au vide.

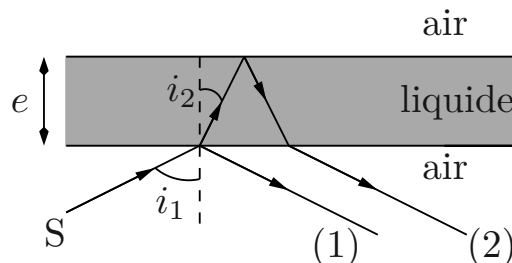


Figure 6 – Mesure de l'épaisseur du film liquide : schéma et notations

Q31. On admet qu'à la réflexion air/liquide, le rayon (1) subit un déphasage de π . En exploitant le théorème de Malus (et le principe de retour inverse de la lumière), montrer que le déphasage à l'infini entre les rayons (2) et (1) s'exprime selon :

$$\varphi = \frac{\alpha}{\lambda} \cos i_2 - \pi. \quad (8)$$

Expliciter le coefficient α en fonction de n_ℓ et de e .

En pratique, on utilise une source polychromatique couvrant le domaine visible. Un spectromètre placé au bout d'une fibre optique dans la direction commune des rayons (1) et (2) permet de relever des longueurs d'onde « éteintes », correspondant à des interférences destructives entre les deux rayons.

Q32. Exprimer les longueurs d'onde éteintes λ_k en fonction de α , i_2 et d'un entier k .

On représente sur la **figure 7** le spectre obtenu lorsque le film liquide est éclairé en incidence normale, ce qui revient à prendre $i_2 = 0$ dans le calcul précédent.

Q33. Dédurre du spectre une valeur de e et la comparer à celle de la **question Q30**.

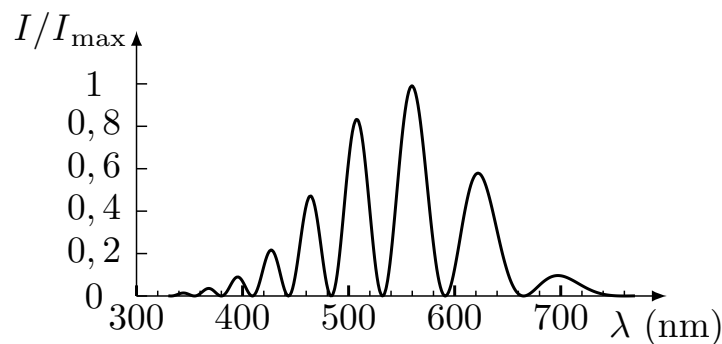


Figure 7 – Spectre mesuré

La fibre optique utilisée est constituée d'un cœur cylindrique en verre d'indice optique n_1 et de diamètre d entouré d'une gaine en verre d'indice optique n_2 (voir **figure 8**). La fibre étant éclairée sous incidence normale, on s'intéresse aux effets de courbure de celle-ci sur la transmission de la lumière.

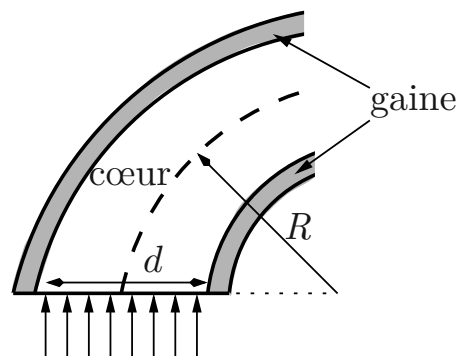


Figure 8 – Fibre optique courbée

Q34. Calculer, littéralement puis numériquement, le rayon de courbure R minimal à partir duquel toute la lumière incidente reste confinée dans le cœur et traverse la fibre sans atténuation.

Données pour la partie IV

Masses volumiques :

air	hélium	eau savonneuse
$\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho_{\text{He}} = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho_\ell = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Indice optique du film de savon : $n_\ell = 1,33$

Caractéristiques de la fibre optique :

- indice optique du cœur : $n_1 = 1,55$
- indice optique de la gaine : $n_2 = 1,45$
- diamètre : $d = 50 \mu\text{m}$

Partie V – Gonfler un ballon volant sans hélium

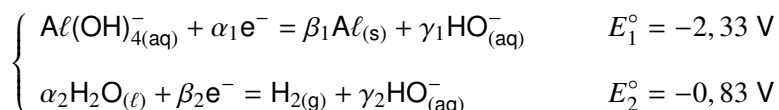
On propose un protocole expérimental permettant de faire s'envoler un ballon de baudruche sans hélium. On verse dans le ballon un détergent à base d'hydroxyde de sodium ($\text{Na}_{(\text{aq})}^+ + \text{HO}_{(\text{aq})}^-$) et un peu d'eau, puis on y ajoute quelques boulettes de papier d'aluminium $\text{Al}_{(\text{s})}$. Une réaction chimique produit alors des ions aluminate $\text{Al}(\text{OH})_{4(\text{aq})}^-$ et du dihydrogène gazeux $\text{H}_{2(\text{g})}$, provoquant l'envol du ballon.

Q35. Justifier qualitativement que cette réaction permet effectivement un envol du ballon.

Q36. L'hydroxyde de sodium est une base forte. Définir ce terme, puis calculer le pH d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $c = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Q37. Calculer le nombre d'oxydation de l'élément Al dans les espèces $\text{Al}(\text{OH})_4^-$ et Al . Préciser quelle espèce est l'oxydant/le réducteur du couple faisant intervenir ces deux espèces.

On s'intéresse à la réaction se produisant dans le ballon. On donne les demi-équations électroniques mises en jeu en milieu basique, ainsi que les potentiels standard associés :



Q38. Déterminer les coefficients stœchiométriques $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, puis en déduire l'équation-bilan de la réaction.

Q39. À la lecture des potentiels standard, quelle hypothèse peut-on faire sur cette réaction ? Une justification est attendue.

Q40. On suppose que le dihydrogène formé est à la pression $P = 1,013 \text{ bar}$ et à la température $T = 298 \text{ K}$. En considérant l'hydroxyde de sodium en excès, calculer la masse d'aluminium m nécessaire à la formation d'un volume $V = 5,0 \text{ L}$ de dihydrogène.

Données pour la partie V

À 298 K : $\text{p}K_e = 14$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Masse molaire de l'aluminium : $M_{\text{Al}} = 27 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

FIN

