

MPI Physique-chimie 2026 : corrigé

Partie I - L'hélium, un gaz « rare » dans notre atmosphère

1. Deux principaux constituants de l'atmosphère : **diazote (80 %)** et **dioxygène (20 %)**.
2. La force d'attraction gravitationnelle s'exprime

$$\vec{F} = -\frac{GM_{\text{T}}m}{r^2}\vec{u}_r$$

avec $r = \text{OP}$ et $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial. Comme $\vec{F}$ est une force centrale,

$$dE_p = -F(r)dr = \frac{GM_{\text{T}}m}{r^2}dr$$

Après intégration,

$$E_p(r) = -\frac{GM_{\text{T}}m}{r}$$

en ayant choisi la constante d'intégration de telle sorte que $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = 0$.

3. Par définition de l'énergie mécanique,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\text{T}}m}{r}$$

La force $\vec{F}$ étant conservative, **l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement**.

4. Appliquons le théorème du moment cinétique à P par rapport au point fixe O dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

Les vecteurs $\vec{OP} = r\vec{u}_r$ et $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ étant colinéaires, on a $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$, soit $\vec{L}_O = \vec{cte}$. Comme $\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge m\vec{v}$, cela implique que les vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{v}$ restent toujours dans le même plan, perpendiculaire au vecteur $\vec{L}_O$, au cours du mouvement : **P a un mouvement plan**. En se plaçant dans le plan $z = 0$ et en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) ,

$$\vec{L}_O = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Par conservation du moment cinétique, et comme la masse m ne varie pas, $r^2\dot{\theta} = \text{cte}$.

5. Exprimons l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GM_{\text{T}}m}{r}$$

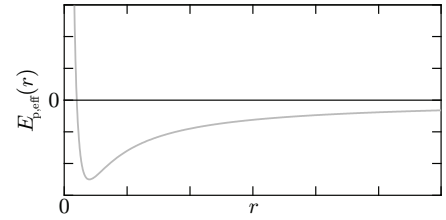
Avec $r^2\dot{\theta} = C$,

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GM_{\text{T}}m}{r}$$

L'énergie mécanique se met effectivement sous la forme proposée en posant

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GM_T m}{r}$$

6. La courbe $E_{p,\text{eff}}(r)$ comporte un terme décroissant en $1/r^2$ à courte distance, et un terme croissant en $-1/r$ à grande distance. Les zones accessibles au point P sont telles que $E_m \geq E_{p,\text{eff}}(r)$. Comme l'énergie potentielle croît à grande distance et tend vers zéro à l'infini, le point pourra « échapper » à l'attraction de la Terre si $E_m \geq 0$.



7. Lorsqu'un objet est initialement lancé de la surface de la Terre à une vitesse v , son énergie mécanique s'exprime

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

La condition $E_m \geq 0$ devient

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

La vitesse de libération s'exprime donc

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 12 \text{ km.s}^{-1}$$

8. Modèle du gaz parfait : atomes considérés **ponctuels** et **sans interaction**, hormis les collisions atome/paroi et atome/atome supposées élastiques.
9. On trouve $u = 1,3 \text{ km.s}^{-1} > v_\ell/10$: **les atomes d'hélium peuvent s'échapper de l'attraction terrestre**, ce qui justifie la faible quantité d'hélium présente dans l'atmosphère.

Partie II - Le laser hélium-néon

10. Les lasers sont par exemple utilisés pour la lecture de disques, la découpe de matériaux, la chirurgie oculaire, la télémétrie...
11. La puissance volumique Joule cédée par le champ EM au conducteur vaut $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$. Pour un conducteur parfait, $\gamma = \infty$: comme p ne peut diverger, cela impose $\vec{E} = \vec{0}$ au sein du conducteur.
12. Les équations de Maxwell s'écrivent, dans un région vide de charges et de courants,

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Appliquons l'identité vectorielle

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

D'après les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Gauss,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E}$$

En intervertissant le rotationnel et la dérivée temporelle dans le membre de gauche, puis en appliquant l'équation de Maxwell-Ampère, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E}$$

soit

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

En injectant la forme proposée pour le champ électrique, on obtient

$$f'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f = 0$$

13. L'équation précédente a pour solution

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{c} + \varphi\right)$$

Les conditions aux limites imposent $f(0) = f(L) = 0$: il vient $\varphi = 0$ et $\omega_n L/c = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}^*$), soit

$$f(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Les fréquences propres sont alors

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

On en déduit l'Intervalle Spectral Libre

$$\text{ISL} = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2L}$$

14. La figure 1 permet d'estimer la longueur de la cavité : $L \approx 13$ cm soit

$$\text{ISL} = 1,2 \text{ GHz}$$

Ce résultat est de l'ordre de la valeur constructeur.

15.

```
def airy(x,t):
    return (np.sqrt(1-t**2)*np.cos(np.pi*x*t))

def g(x):
    S = 0
    T = np.linspace(-1,1,201)
    for k in T:
        S = S + airy(x,k) * (2/200)
    return S
```

16. On a

$$g(0) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Avec le formulaire,

$$g(0) = \left[\frac{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{\arcsin(1) - \arcsin(-1)}{2}$$

$$g(0) = \frac{\pi}{2}$$

Comme $\pi/2 \approx 1,57$, on retrouve bien la valeur de $g(0)$ lue sur le graphe.

17.

```
def h(a,b,eps):
    while abs(b-a) > 2*eps:
        milieu = (a+b)/2
        if g(a)*g(milieu) > 0:
            a = milieu
        else:
            b = milieu
    return ((a+b)/2)

print(h(1 , 1.5 , 0.01))
```

18. Par la relation de composition des incertitudes,

$$u(\lambda) = \lambda \sqrt{\left[\frac{u(\phi)}{\phi}\right]^2 + \left[\frac{u(R)}{R}\right]^2 + \left[\frac{u(d)}{d}\right]^2}$$

On calcule l'écart normalisé

$$z = \frac{656 - 632,8}{49} = 0,47$$

Puisque $z < 2$, les deux valeurs sont compatibles.

Partie III - De l'hélium pour détecter les fuites

19. L'ion est soumis à la force de Lorentz magnétique $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Le champ $\vec{B}$ étant selon $\vec{e}_z$, la 2^e loi de Newton appliquée à l'ion dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projetée selon $\vec{e}_z$, donne

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0$$

soit $v_z(t) = v_z(0) = 0$: la trajectoire est incluse dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

20. La puissance de la force de Lorentz magnétique vaut

$$P = (e\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

D'après le théorème de la puissance cinétique, le vecteur vitesse est de norme constante : **le mouvement est uniforme**. La force étant dirigée selon $-\vec{e}_y$ au point O, $\vec{B}$ est selon $+\vec{e}_z$.

21. Avec $\vec{B} = B\vec{e}_z$, la 2^e loi de Newton appliquée à l'ion dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit aux projections

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = ev_y B \\ m\dot{v}_y = -ev_x B \end{cases}$$

soit, en posant $\omega = eB/m$,

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y \\ \dot{v}_y = -\omega v_x \end{cases}$$

22. Combinons les deux équations ci-dessus dans le but de faire apparaître $\underline{u}$:

$$j\dot{v}_x + \dot{v}_y = j\omega v_y - \omega v_x$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega(v_y + jv_x)$$

De fait, $\underline{u}$ satisfait bien à l'équation différentielle

$$\frac{d\underline{u}}{dt} - j\omega \underline{u} = 0$$

23. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $\underline{u}(t) = A e^{j\omega t}$, avec A une constante imposée par la condition initiale

$$\underline{u}(0) = jv_x(0) + v_y(0) = jv_0$$

Ainsi,

$$\underline{u}(t) = jv_0 e^{j\omega t}$$

En décomposant l'exponentielle complexe en ses parties réelle et imaginaire,

$$\underline{u}(t) = jv_0 \cos(\omega t) - v_0 \sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \Re(\underline{u}) = -v_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad v_x(t) = \Im(\underline{u}) = v_0 \cos(\omega t)$$

24. Une nouvelle intégration permet d'aboutir aux équations horaires $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + C \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + D \end{cases}$$

où C et D sont fixés par les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$. On trouve $C = 0$ et $D = -v_0/\omega$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} [\cos(\omega t) - 1] \end{cases}$$

25. On remarque que

$$[x(t)]^2 + \left[y(t) + \frac{v_0}{\omega}\right]^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

De fait,

$$[x(t)]^2 + [y(t) + R]^2 = R^2 \quad \text{avec} \quad R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de rayon R et de centre $(0, -R)$.

26. On considère un ion plus lourd, de masse $m' > m$ et de vitesse initiale v'_0 . Les deux ions ayant même énergie cinétique initiale, $m'v'_0{}^2 = mv_0{}^2$. Le rayon R' de la trajectoire de l'ion plus lourd vérifie

$$\frac{R'}{R} = \frac{m'v'_0}{mv_0} = \sqrt{\frac{m'}{m}} > 1$$

Ainsi, $R' > R$. On en déduit les attributions suivantes :

trajectoire	(1)	(2)	(3)
ions	légers	hélium	lourds

27. Les ions hélium effectuent un quart de tour dans la zone de champ magnétique. La durée d'un tour valant $T = 2\pi/\omega$, on en déduit, avec $m = \mathcal{M}_{\text{He}}/\mathcal{N}_A$,

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi \mathcal{M}_{\text{He}}}{2eB\mathcal{N}_A} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

28. La vitesse de l'ion hélium vaut, en prenant $R \simeq 3 \text{ cm}$,

$$v_0 = \frac{eBR}{m} = \frac{eBR\mathcal{N}_A}{\mathcal{M}_{\text{He}}} = 7,2 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

Puisque $v_0 \ll c$, les effets relativistes sont bien négligeables.

Partie IV - Des bulles de savon remplies d'hélium

29. On a d'une part $V_0 = 4\pi r^3/3$, et d'autre part $V_0 = a^3$. Le rapport des surfaces vaut

$$\frac{S_s}{S_c} = \frac{4\pi r^2}{6a^2} = \frac{4\pi}{6V_0^{2/3}} \left(\frac{3V_0}{4\pi} \right)^{2/3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3}$$

$$\boxed{\frac{S_s}{S_c} = \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/3} < 1}$$

Ainsi, la surface de la sphère est plus petite que celle du cube : c'est pourquoi l'on voit davantage de bulles sphériques que de bulles cubiques !

30. Une bulle est soumise à son poids, comprenant celui de l'hélium et de la coque liquide

$$\boxed{\vec{P} = \left(\frac{4}{3}\pi r_c^3 \rho_{\text{He}} + 4\pi r_c^2 e \rho_\ell \right) \vec{g}}$$

ainsi qu'à la poussée d'Archimède

$$\boxed{\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi r_c^3 \rho_a \vec{g}}$$

Comme la bulle de rayon r_c ne monte pas ni ne descend, les forces s'exerçant sur elle se compensent :

$$\frac{4}{3}\pi r_c^3 \rho_{\text{He}} + 4\pi r_c^2 e \rho_\ell = \frac{4}{3}\pi r_c^3 \rho_a$$

Il vient

$$\boxed{e = \frac{(\rho_a - \rho_{\text{He}})r_c}{3\rho_\ell} = 2,0 \text{ } \mu\text{m}}$$

31. Calculons la différence de marche entre les rayons (2) et (1). Par le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière,

$$\delta = (AB) + (BC) - (AD) = 2n_\ell AB - AD$$

Or, $AB = e/\cos i_2$ et

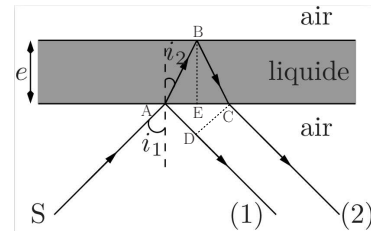
$$AD = AC \sin i_1 = 2AE \sin i_1 = 2e \tan i_2 \sin i_1$$

Avec la relation de Snell-Descartes $\sin i_1 = n_\ell \sin i_2$,

$$\delta = \frac{2n_\ell e}{\cos i_2} - \frac{2n_\ell e \sin^2 i_2}{\cos i_2} = 2n_\ell e \cos i_2$$

On en déduit le déphasage entre les rayons (2) et (1)

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} - \pi = \frac{\alpha}{\lambda} \cos i_2 - \pi \quad \text{avec} \quad \alpha = 4\pi n_\ell e}$$



32. Les longueurs d'onde « éteintes » sont telles que $\varphi = 2k\pi - \pi$ avec $k \in \mathbb{N}$; on en déduit

$$\boxed{\lambda_k = \frac{\alpha \cos i_2}{2k\pi}}$$

33. Pour $i_2 = 0$,

$$\lambda_k = \frac{\alpha}{2k\pi} = \frac{2n_\ell e}{k}$$

Pour un entier k_0 donné, on repère une longueur d'onde $\lambda_{k_0} = 670 \text{ nm}$ et pour l'entier $k_0 + 6$, $\lambda_{k_0+6} = 380 \text{ nm}$. D'après la relation précédente,

$$\frac{1}{\lambda_{k_0+6}} - \frac{1}{\lambda_{k_0}} = \frac{k_0 + 6}{2n_\ell e} - \frac{k_0}{2n_\ell e} = \frac{6}{n_\ell e}$$

On en déduit

$$e = \frac{3\lambda_{k_0}\lambda_{k_0+6}}{n_\ell(\lambda_{k_0} - \lambda_{k_0+6})} = 2,0 \mu\text{m}$$

On obtient la même valeur qu'à la question 30.

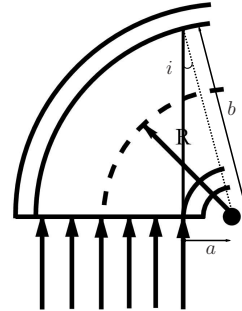
34. Il s'agit de faire en sorte que tous les rayons incidents respectent la condition de réflexion totale à l'interface cœur/gaine : $\sin i > n_2/n_1$. La condition la plus restrictive est atteinte pour le rayon tracé ci-contre. Or,

$$\sin i = \frac{a}{b} = \frac{R - d/2}{R + d/2}$$

Il vient

$$\frac{R - d/2}{R + d/2} > \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1 \left(R - \frac{d}{2} \right) > n_2 \left(R + \frac{d}{2} \right)$$



On en déduit

$$R > \frac{d n_1 + n_2}{2 n_1 - n_2} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Partie V - Gonfler un ballon volant sans hélium

35. Le dihydrogène formé étant **moins dense que l'air**, la poussée d'Archimède va permettre au ballon de s'envoler.
36. Une base forte est une base dont la réaction avec l'eau est **totale**. L'ion hydroxyde étant la base la plus forte pouvant exister dans l'eau, on en déduit $[\text{HO}^-] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$, soit $\text{pOH} = 1$. Grâce à la relation $\text{pH} + \text{pOH} = \text{p}K_e$, on en déduit

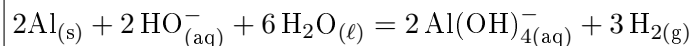
$$\text{pH} = \text{p}K_e - \text{pOH} = 13$$

37. Al : $\boxed{\text{NO(Al)} = 0}$. Al(OH)_4^- : avec $\text{NO(O)} = -\text{II}$ et $\text{NO(H)} = +\text{I}$, on trouve $\boxed{\text{NO(Al)} = +\text{III}}$. Ainsi, Al est le **réducteur**, Al(OH)_4^- est l'**oxydant**.

38. On trouve

$$\begin{cases} \text{Al(OH)}_4^-_{(\text{aq})} + 3\text{e}^- = \text{Al}_{(\text{s})} + 4\text{HO}^-_{(\text{aq})} \\ 2\text{H}_2\text{O}_{(\ell)} + 2\text{e}^- = \text{H}_{2(\text{g})} + 2\text{HO}^-_{(\text{aq})} \end{cases}$$

On combine ces deux demi-équations électroniques en faisant disparaître les électrons ($\times 2$ sur la première, $\times 3$ sur la seconde) :



39. Le réducteur le plus fort (Al) réagissant avec l'oxydant le plus fort (H_2O), la réaction est thermodynamiquement favorisée (règle du γ). L'écart $E_2^\circ - E_1^\circ$ étant supérieur à 0,25 V, on peut supposer la réaction **totale**.
40. En assimilant le dihydrogène à un gaz parfait, on cherche à en former une quantité

$$n_{\text{H}_2} = \frac{PV}{RT}$$

La soude étant en excès, on en déduit la quantité de matière d'aluminium nécessaire, $n_{\text{Al}} = 2n_{\text{H}_2}/3$, puis la masse

$$m = n_{\text{Al}}\mathcal{M}_{\text{Al}} = \frac{2PV\mathcal{M}_{\text{Al}}}{3RT} = 3,7 \text{ g}$$