

1. Si n_{client} représente le nombre de clients électricité en 2022, la puissance électrique moyenne produite par les centrales hydroélectriques par client électricité est estimée à

$$\mathcal{P}_{\text{elec}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{elec.}}}{\Delta t_{\text{an}} \cdot n_{\text{client}}}$$

soit

Application numérique :

$$\mathcal{P}_{\text{elec}} \approx \frac{50 \cdot 10^{12}}{365 \times 24 \times 4 \cdot 10^7} \sim 1,5 \cdot 10^2 \text{ W}$$

Partie I- Convertir l'énergie hydraulique en énergie électrique

I.1- Une retenue d'eau

2. L'expression de la force d'interaction électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 placée en O_1 sur une charge ponctuelle q_2 placée en O_2 tel que $O_1 O_2 = r$:

$$\overrightarrow{F_{e,1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^2} \overrightarrow{u_{12}} \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{u_{12}}\| = 1$$

L'expression de la force d'interaction gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m_1 placée en O_1 sur une masse ponctuelle m_2 placée en O_2 tel que $O_1 O_2 = r$:

$$\overrightarrow{F_{g,1 \rightarrow 2}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \overrightarrow{u_{12}} \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{u_{12}}\| = 1$$

En procédant aux analogies suivantes

$$q \longleftrightarrow m$$

et

$$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \longleftrightarrow -\mathcal{G}$$

le théorème de Gauß gravitationnel s'énonce selon

Le flux champ gravitationnel $\overrightarrow{G}$ créé par une distribution de masse $\mathcal{D}$ à travers toute surface fermée et orientée Σ est égal à l'opposé du produit de la constante de la gravitation universelle multipliée par 4π et de la masse de $\mathcal{D}$ intérieure à Σ .

$$\oint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{G(M)} \cdot d\overrightarrow{S_M} = -4\pi \mathcal{G} \cdot m_{\text{int}}$$

La Terre est assimilée à une **boule homogène à répartition sphérique de masse** de rayon R_T .

Les invariances et les symétries de la distribution des masses conduisent à $\overrightarrow{G(M)} = -G_r(r) \overrightarrow{u_r}$ dans le système de coordonnées sphériques. Le champ gravitationnel créé par la Terre est donc un **champ radial**.

En choisissant comme surface fermée de Gauß une sphère de centre O , centre de la Terre, et de rayon $r > R_T$ (le point M est situé à l'extérieur de l'astre), l'application du théorème de Gauß gravitationnel amène à

$$-4\pi r^2 \cdot G_r(r) = -4\pi \mathcal{G} \cdot M_T \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{G(M)} = -\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} \overrightarrow{u_r}$$

3. Posons $g_T = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2}$, valeur du champ gravitationnel à la surface de la Terre. Alors

$$G_r(r) = g_T \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \quad \text{soit} \quad G_r(r = R_T + h) = \frac{g_T}{\left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^2}$$

Avec $\varepsilon = \frac{h}{R_T} \ll 1$, il vient $G_r(r = R_T + h) \approx g_T \cdot \left(1 - 2 \frac{h}{R_T} \right) = g(h)$.

En imposant $\frac{g_T - g(h)}{g_T} < 1 \cdot 10^{-3}$, l'altitude h doit être inférieure à h_{max} telle que

$$h_{\text{max}} = 5 \cdot 10^{-4} R_T$$

soit

Application numérique :

$$h_{\text{max}} = 3,2 \text{ km}$$

4. À l'échelle d'un barrage d'une dizaine de mètres de hauteur, le champ gravitationnel terrestre peut **être raisonnablement considéré comme uniforme**.

5. Considérons une particule de fluide dans l'eau au repos mésoscopique. Celle-ci est soumise à

- son poids $\delta \vec{P}$ de densité volumique associée $\vec{\varphi}_g = \mu_e \cdot g \vec{u}_z$;
- la résultante des forces pressantes $\delta \vec{F}_{\text{press}}$ de densité volumique associée $\vec{\varphi}_{\text{press}} = -\vec{\text{grad}} P$.

En appliquant le théorème de la résultante statique

$$\mu_e \cdot g \vec{u}_z = \vec{\text{grad}} P \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_e \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Alors $\frac{dP}{dz} = \mu_e \cdot g$ qu'on intègre avec la condition aux limites $P(z=0) = P_0$ pour obtenir

$$\forall P \in [0, H], \quad P(z) = P_0 + \mu_e \cdot g \cdot z$$

6. Le vecteur unitaire normal à la face du barrage **contact avec l'eau** est $\vec{u}_x$.

Envisageons une bandelette de cette face de longueur L , de largeur $d\ell = dz$ donc d'aire $dS = L \cdot dz$. La résultante des forces pressantes exercées par l'eau sur cet élément de surface possède l'expression

$$\delta \vec{F}_{P,\text{eau}} = P(z) dS \vec{u}_x \quad \text{soit} \quad \delta \vec{F}_{P,\text{eau}} = (P_0 + \mu_e \cdot g \cdot z) \cdot L \cdot dz \vec{u}_x$$

En intégrant entre $z=0$ et $z=H$, la résultante des forces pressantes exercées par l'eau sur le barrage s'exprime selon

$$\vec{F}_{P,\text{eau}} = \int_{z=0}^H (P_0 + \mu_e \cdot g \cdot z) \cdot L \cdot dz \vec{u}_x \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{P,\text{eau}} = \left(P_0 + \frac{1}{2} \mu_e \cdot g \cdot H \right) \cdot H \cdot L \vec{u}_x$$

Application numérique :

$$F_{P,\text{eau}} = \left(1 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} 1,0 \cdot 10^3 \times 10 \times 15 \right) \times 15 \times 6 \cdot 10^2 \sim 1 - 2 \cdot 10^9 \text{ N}$$

I.2- Remplissage d'un bassin et contrôle du niveau

7. L'**approximation acoustique** consiste à considérer de faibles perturbations des champs par rapport à leurs valeurs au repos soit

$$\left| \tilde{\varrho}(x, t) \right| \ll \varrho_0 \quad \left| \tilde{p}(x, t) \right| \ll P_0 \quad \left| \tilde{v}(x, t) \right| \ll c_s$$

c_s désignant la célérité des ondes acoustiques dans le milieu propagatif, ici l'air.

8. L'équation unidimensionnelle de conservation de la masse s'écrit $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\varrho \cdot v) = 0$

En se limitant aux termes du premier ordre en perturbation : $\varrho \cdot v \approx \varrho_0 \cdot \tilde{v}$, l'équation précédente devient

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0 \quad \text{Première équation de couplage}$$

9. Les termes de l'équation obtenue par application du théorème de la résultante dynamique appliquée à une particule de fluide sont :

- $\frac{D\tilde{v}}{dt} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$ est la **dérivée particulière** associée au champ eulerien des vitesses. Il s'agit de l'**accélération** d'une particule de fluide.
- $-\frac{\partial P}{\partial x}$ est la coordonnée suivant $\vec{u}_x$ du vecteur **densité volumique des forces pressantes** s'exerçant sur la particule de fluide d'intérêt.

En se limitant aux termes du premier ordre en perturbation dans le cadre de l'approximation acoustique :

- $\tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$ est négligé car du second ordre en perturbation ;
- $\varrho \frac{D\tilde{v}}{dt} \approx \varrho_0 \frac{D\tilde{v}}{dt}$ afin de ne conserver que les termes du premier ordre en perturbation.

L'équation issue de l'application du théorème de la résultante dynamique se simplifie dans le cadre de cette étude selon

$$\varrho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad \text{Seconde équation de couplage}$$

10. En envisageant une perturbation isentropique infinitésimale de l'état de repos :

$$d\rho = \varrho_0 + \tilde{\varrho} - \varrho_0 = \varrho_0 \cdot \chi_s dP \quad \text{avec} \quad dP = P_0 + \tilde{p} - P_0$$

La **troisième équation de couplage** est alors $\tilde{\varrho}(x, t) = \varrho_0 \cdot \chi_s \tilde{p}(x, t)$.

11. En injectant la troisième équation de couplage dans la première équation de couplage :

$$\chi_s \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \quad [\star]$$

En dérivant la seconde équation de couplage par rapport à x à t constant :

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t} = \varrho_0 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} \quad \text{par théorème de Schwarz}$$

En injectant $[\star]$, il vient

$$\varrho \cdot \chi_s \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}$$

12. $\tilde{p}$ est solution d'une **équation de d'Alembert 1D** où $c_s = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0 \cdot \chi_s}}$ désigne la **célérité des ondes acoustiques dans le milieu propagatif**.

c_s a pour dimension celle d'une vitesse ie. c_s est **homogène à une longueur L divisée par un temps T** :

$$[c_s] \equiv L \cdot T^{-1}.$$

13. En assimilant l'air à un gaz parfait de température T_0 : $\varrho_0 = \frac{P_0}{r \cdot T_0}$ avec $r = \frac{R}{\overline{\mathcal{M}}_{\text{air}}}$, $\overline{\mathcal{M}}_{\text{air}}$ désignant la masse molaire moyenne de l'air.

Pour une masse m d'air subissant une évolution isentropique à partir de l'état de repos, la loi de Laplace permet d'affirmer que $\frac{P}{\varrho^\gamma} = \frac{P_0}{\varrho_0^\gamma}$.

14. En utilisant la dérivée logarithmique au voisinage de (P_0, ϱ_0) : $\frac{dP}{P_0} = \gamma \frac{d\varrho}{\varrho_0}$.

En observant que $\varrho_0 \cdot \chi_s = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\gamma} \frac{\varrho_0}{P_0}$ et compte-tenu de l'équation d'état des gaz parfait : $\frac{\varrho_0}{P_0} = \frac{1}{r \cdot T_0}$, la célérité c_s des ondes sonores dans l'air peut être exprimée selon

$$c_s = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T_0} \quad \text{soit} \quad c_s = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_0}{\overline{\mathcal{M}}_{\text{air}}}}$$

La masse molaire moyenne de l'air a pour expression : $\overline{\mathcal{M}}_{\text{air}} = x_{O_2} \cdot \mathcal{M}_{O_2} + x_{N_2} \cdot \mathcal{M}_{N_2}$ en approximant l'air à un mélange parfait de gaz parfaits de composition molaire

- $x_{O_2} = 0,20$ ie. 20 % de dioxygène gazeux ;
- $x_{N_2} = 0,80$ ie. 80 % de diazote gazeux.

15. **Application numérique :**

- La masse molaire moyenne de l'air : $\overline{\mathcal{M}}_{\text{air}} = 0,20 \times 32 + 0,80 \times 28 = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- La masse volumique de l'air :

$$\varrho_0 = \frac{1,0 \cdot 10^5 \times 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 3,0 \cdot 10^2} \quad \text{soit} \quad \varrho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

- La célérité des ondes sonores dans l'air :

$$c_s = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,31 \times 3,0 \cdot 10^2}{29 \cdot 10^{-3}}} \quad \text{soit} \quad c_s \approx 3,2 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

16. La durée d'un aller-retour d'un paquet d'onde ultrasonore est estimée à $\Delta t_{\text{aller-retour}} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

La hauteur d'eau mesurée à cet instant est alors

$$h(t_{\text{mes}}) = \frac{c_s \cdot \Delta t_{\text{aller-retour}}}{2}$$

soit

Application numérique :

$$h(t_{\text{mes}}) = \frac{3,4 \cdot 10^2 \times 4,4 \cdot 10^2}{2} = 7,5 \text{ m}$$

I.3- Couple hydraulique et puissance utile

17. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est prise au niveau de l'entrée de la turbine Francis : $z_E = 0$. La réponse à la question **q.3** permet d'affirmer que le champ de pesanteur à l'échelle de la retenue d'eau est **uniforme**.

Envisageons alors une tranche de fluide située entre les altitudes z et $z + dz$. L'énergie potentielle de pesanteur de cette dernière a pour expression

$$\delta \mathcal{E}_{p, \text{ pes}} = \delta m \cdot g \cdot z \quad \text{soit} \quad \delta \mathcal{E}_{p, \text{ pes}} = \mu_e \cdot g \cdot S \cdot z \, dz$$

Par extensivité de l'énergie potentielle de pesanteur

$$\mathcal{E}_{p, \text{ pes}} = \int_{z=H}^{H+h_0} \mu_e \cdot g \cdot S \cdot z \, dz \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_{p, \text{ pes}} = \frac{1}{2} \mu_e \cdot g \cdot S \cdot \left((H + h_0)^2 - H^2 \right)$$

En introduisant la masse totale d'eau dans la retenue : $m_{\text{tot}} = \mu_e \cdot S \cdot h_0$

$$\mathcal{E}_{p, \text{ pes}} = m_{\text{tot}} \cdot g \cdot \left(H + \frac{h_0}{2} \right) = \mu_e \cdot S \cdot h_0 \cdot \left(H + \frac{h_0}{2} \right)$$

Il s'agit de l'énergie hydraulique maximale pouvant être convertie en énergie électrique. En effet :

- des **pertes de charges régulières** (présence de viscosité) et **singulières** présentes tout au long de l'écoulement dans la conduite amont ainsi que dans la turbine dégradent cette énergie hydraulique en énergie thermique ;
- le **caractère turbulent de l'écoulement** est à l'origine d'une dissipation de l'énergie hydraulique en énergie thermique.

18. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la roue. Dans ce référentiel, l'écoulement est supposé incompressible, homogène, stationnaire et parfait.

Le débit volumique est alors **conservé**.

En le définissant dans le sens $-\vec{u}_r$: $\mathcal{Q}_v = \int_0^{e(r)} -2\pi r \cdot W_r \, dz$, il vient

- ... l'expression suivante en fonction des paramètres d'entrée de l'écoulement

$$\mathcal{Q}_v = -2\pi R_e \cdot e_e \times W_{r,e} > 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{Q}_v = -2\pi R_e \cdot e_e \times V_{r,e}$$

- ... l'expression suivante en fonction des paramètres de sortie de l'écoulement

$$\mathcal{Q}_v = -2\pi R_s \cdot e_s \times W_{r,s} > 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{Q}_v = -2\pi R_s \cdot e_s \times V_{r,s}$$

19. Le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ en **mouvement de rotation uniforme** d'axe $(O, \vec{u}_z)$ par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen **n'est pas un référentiel galiléen**.

20. On considère le système ouvert (Σ) suivant : {fluide en écoulement à l'intérieur de la roue Francis} de volume de contrôle fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Le sur-système fermé (Σ^*) est défini par ...

- à l'instant t : $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \cup \delta \Sigma_{\text{entrant}}$ avec $\delta \Sigma_{\text{entrant}}$: fluide algébriquement entrant dans la roue Francis entre les instants t et $t + dt$;
- à l'instant $t + dt$: $\Sigma^*(t + dt) = \Sigma(t + dt) \cup \delta \Sigma_{\text{sortant}}$ avec $\delta \Sigma_{\text{sortant}}$: fluide algébriquement sortant de la roue Francis entre les instants t et $t + dt$.

D'après l'énoncé, le théorème scalaire du moment cinétique appliqué à Σ^* dans un tel référentiel a pour expression :

$$\frac{dL_{z, \Sigma^*/\mathcal{R}}}{dt} = -\Gamma_i + \Gamma_{\text{inertie}} \quad \text{ou encore} \quad dL_{z, \Sigma^*/\mathcal{R}} = (-\Gamma_i + \Gamma_{\text{inertie}}) dt$$

avec Γ_i le couple utile exercé par le fluide sur la roue Francis.

Par extensivité de $L_{z, \Sigma^*/\mathcal{R}}$:

- $L_{z, \Sigma^*/\mathcal{R}}(t) = L_{z, \Sigma/\mathcal{R}}(t) + \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot R_e \cdot W_{\theta, e} dt$ avec $W_{\theta, e} < 0$;
- $L_{z, \Sigma^*/\mathcal{R}}(t + dt) = L_{z, \Sigma/\mathcal{R}}(t + dt) + \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot R_s \cdot W_{\theta, s} dt$ avec $W_{\theta, s} < 0$.

Il vient
$$dL_{z, \Sigma^*/\mathcal{R}} = L_{z, \Sigma/\mathcal{R}}(t + dt) - L_{z, \Sigma/\mathcal{R}}(t) + \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot (R_s \cdot W_{\theta, s} - R_e \cdot W_{\theta, e})$$

L'écoulement étant stationnaire : $L_{z, \Sigma/\mathcal{R}}(t + dt) - L_{z, \Sigma/\mathcal{R}}(t) = 0$. De plus, la loi de composition des vitesses permet d'affirmer que :

- $W_{\theta, e} = V_{\theta, e} - R_e \cdot \omega$;
- $W_{\theta, s} = V_{\theta, s} - R_s \cdot \omega$.

$$dL_{z, \Sigma^*/\mathcal{R}} = \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot (R_s \cdot V_{\theta, s} - R_e \cdot V_{\theta, e} - (R_s^2 - R_e^2) \cdot \omega) dt$$

Ainsi $\mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot (R_s \cdot V_{\theta, s} - R_e \cdot V_{\theta, e} - (R_s^2 - R_e^2) \cdot \omega) = -\Gamma_i - \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot (R_s^2 - R_e^2) \cdot \omega$ donc en injectant les deux expressions du débit volumique $\mathcal{D}_v$:

$$\boxed{\Gamma_i = 2\pi \mu_e \cdot (R_s^2 \cdot V_{r, s} \cdot V_{\theta, s} \cdot e_s - R_e^2 \cdot V_{r, e} \cdot V_{\theta, e} \cdot e_e)}$$

21. Un point M situé à une distance r de l'axe de rotation et lié au référentiel de la roue Francis décrit dans ce dernier un **mouvement circulaire uniforme**. Son vecteur vitesse est donc $\boxed{\vec{U}(M) = r \cdot \omega \vec{u}_\theta}$.

Sachant que $\vec{V}(M) = \vec{U}(M) + \vec{W}(M)$ et en projetant orthogonalement cette égalité vectorielle sur la droite $(M, \vec{u}_\theta)$:

$$V_\theta = U + W_\theta = U + \frac{W_r}{\tan(\beta)} \text{ d'après le triangle des vitesses}$$

En projetant orthogonalement cette même égalité vectorielle sur la droite $(M, \vec{u}_r)$: $W_r = V_r$ donc $\boxed{V_\theta = U + \frac{V_r}{\tan(\beta)}}$.

22. En se souvenant que $\Gamma_i = 2\pi \mu_e \cdot (R_s^2 \cdot V_{r, s} \cdot V_{\theta, s} \cdot e_s - R_e^2 \cdot V_{r, e} \cdot V_{\theta, e} \cdot e_e)$

soit
$$\Gamma_i = 2\pi \mu_e \cdot \left(R_s^2 \cdot V_{r, s} \cdot \left(U_s + \frac{V_{r, s}}{\tan(\beta_s)} \right) \cdot e_s - R_e^2 \cdot V_{r, e} \cdot \left(U_e + \frac{V_{r, e}}{\tan(\beta_e)} \right) \cdot e_e \right)$$

En introduisant la vitesse angulaire ω ainsi que le débit volumique $\mathcal{D}_v$:

$$\Gamma_i = \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot \left(\frac{R_e \cdot V_{r, e}}{\tan(\beta_e)} - \frac{R_s \cdot V_{r, s}}{\tan(\beta_s)} + (R_e^2 - R_s^2) \cdot \omega \right)$$

d'où
$$\boxed{\Gamma_i = \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot \left[\frac{\mathcal{D}_v}{2\pi} \left(\frac{1}{e_s \cdot \tan(\beta_s)} - \frac{1}{e_e \cdot \tan(\beta_e)} \right) + (R_e^2 - R_s^2) \cdot \omega \right]}$$

La puissance indiquée a pour formule $\mathcal{P}_i = \Gamma_i \cdot \omega$

soit
$$\boxed{\mathcal{P}_i = \omega \cdot \mu_e \cdot \mathcal{D}_v \cdot \left[\frac{\mathcal{D}_v}{2\pi} \left(\frac{1}{e_s \cdot \tan(\beta_s)} - \frac{1}{e_e \cdot \tan(\beta_e)} \right) + (R_e^2 - R_s^2) \cdot \omega \right]}$$

En sortie d'arbre, $\boxed{\Gamma < \Gamma_i}$ en raison notamment du caractère non parfait des liaisons pivots entre le rotor et le stator de la turbine. La **présence de frottements fluides et secs** dégradent le rendement de la conversion d'énergie hydraulique en énergie électrique.

Partie II- Transport de l'énergie électrique

II.1- Transformateur de tension

23. Le fonctionnement d'un transformateur est basé sur le **phénomène d'induction qui se manifeste uniquement en régime temporellement variable**. L'utilisation d'un transformateur en régime continu ne permettra pas de réaliser la fonction souhaitée.

24. L'équation de Maxwell-Thomson s'écrit $\boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0}$.

L'absence de fuites magnétiques fait que le tore ferromagnétique constitue un tube de champ magnétique tout au long duquel il y a **conservation du flux magnétique** à travers une section droite du tore d'après l'équation de Maxwell-Thomson.

25. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\boxed{\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$.

Compte-tenu de la convention d'orientation des enroulement primaires et secondaires adoptée, il vient

$$u_1 = -e_1 = +N_1 \frac{d\Phi_{B_{\text{tot}} \rightarrow 1 \text{ spire}}}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = -e_2 = +N_2 \frac{d\Phi_{B_{\text{tot}} \rightarrow 1 \text{ spire}}}{dt}$$

La loi de transformation des tensions s'écrit donc $\boxed{u_2(t) = \frac{N_2}{N_1} u_1(t)}$.

26. Le théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques idéalisés et dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques s'énonce comme suit :

La circulation du vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ le long d'un contour fermé et orienté (Γ_a) est égale à la somme des intensités algébriques des courants libres enlacés.

$$\boxed{\oint_{M \in \Gamma_a} \vec{H}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = \sum_k i_{k, \text{lib}, \text{enl}}}$$

Le contour d'Ampère (Γ_a) envisagé est un cercle de centre O et de rayon a passant à l'intérieur du tore. Comme $a \gg \sqrt{S}$, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est considéré **uniforme sur toute section droite** du tore. Puisque cette section droite est la même en chaque point M du tore, $\|\vec{H}(M)\|$ est **uniforme** en chaque point de Γ_a et l'application du théorème d'Ampère conduit à

$$2\pi H(t) \cdot a = N_1 \cdot i_1(t) + N_2 \cdot i_2(t) \quad \text{soit} \quad i_2(t) = \frac{2\pi a \cdot B(t)}{N_2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} - \frac{N_1}{N_2} i_1(t)$$

car le milieu étant **linéaire** : $H(t) = \frac{B(t)}{\mu_0 \cdot \mu_r}$.

Le milieu magnétique étant **idéal** : $\mu_r \rightarrow +\infty$ ce qui entraîne $\boxed{i_2(t) = -\frac{N_1}{N_2} i_1(t)}$. On retrouve la loi de transformation des courants.

27. La puissance électrocinétique absorbée par le primaire est : $p_1(t) = u_1(t) \cdot i_1(t)$.

La puissance électrocinétique fournie par le secondaire au reste du circuit est : $p_2(t) = -u_2(t) \cdot i_2(t)$.

En injectant les deux lois de transformation précédentes, il vient $\boxed{p_1(t) = p_2(t)}$. Le rendement de conversion de puissance d'un tel transformateur idéal est $\boxed{\eta = 1 = 100 \%}$.

Les transformateurs réels ont des rendements inférieurs $\boxed{\eta_{\text{réel}} \sim 80 \% \quad - \quad 90 \%}$ en raison de l'existence des

- **pertes cuivre** dû à la résistance électrique finie non nulle des différents enroulements ;
- **pertes fer** : pertes par hystérésis (le milieu magnétique n'est pas idéal et non linéaire) et par courants de Foucault (le milieu magnétique possède lui aussi une conductivité finie non nulle).

II.2- Tracé d'un cycle d'hystérésis

28. Un **milieu ferromagnétique doux** se caractérise en particulier par un **cycle d'hystérésis étroit**. Pour des excitations magnétiques H pas trop élevées (saturation évitée), ce cycle d'hystérésis peut être assimilé en première approximation à un **segment de droite de pente** $\mu_0 \cdot \mu_r$. Il y a **linéarisation du comportement** du milieu magnétique.

Pour un tel milieu, l'ordre de grandeur de l'excitation coercitive est

$$H_c \sim 1 \cdot 10^1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

29. L'ALi est idéal en régime linéaire.

$i^+ = 0 \text{ A}$ et $\varepsilon = v^+ = v^- = 0 \text{ V}$ imposent que l'entrée inverseuse est au potentiel nul. Donc l'impédance d'entrée du montage à ALi est égale à

$$\underline{Z} = -\frac{u_e}{i_2} = R$$

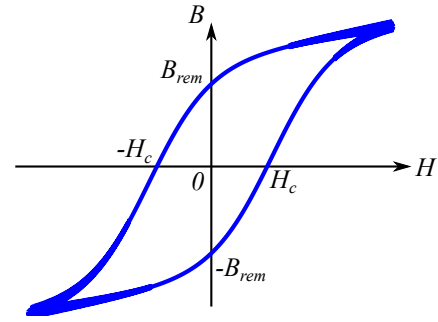


Figure 1 – Cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique doux

Le secondaire est ainsi chargé par un conducteur ohmique de résistance électrique équivalente

$$R_{\text{eq}} = R + \frac{R^2/10}{R/10 + R} = \frac{12}{11} R > R = 470 \text{ k}\Omega$$

On peut considérer alors $0 \approx |i_2(t)| \ll |i_1(t)|$.

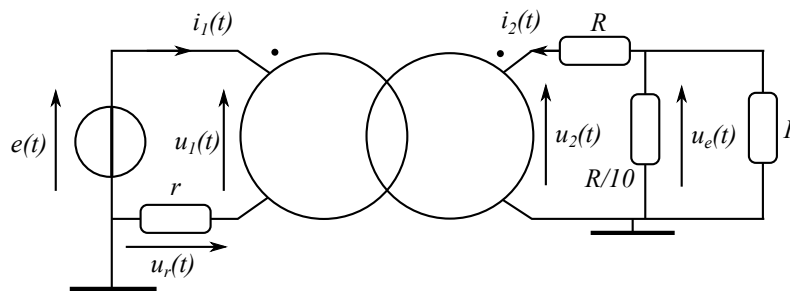


Figure 2 – Schéma électrique équivalent du secondaire chargé

L'application du théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques idéalisés a permis d'obtenir :

$$2\pi H(t) \cdot a = N_1 \cdot i_1(t) + N_2 \cdot i_2(t) \quad \text{soit} \quad i_1(t) \approx \frac{2\pi H(t) \cdot a}{N_1}$$

La loi d'Ohm appliquée au conducteur ohmique de résistance r aboutit à l'égalité suivante

$$u_r(t) = r \cdot i_1(t) \quad \text{donc} \quad u_r(t) = \frac{2\pi r \cdot a}{N_1} H(t)$$

Il y a bien **proportionnalité** entre la tension u_r et l'excitation magnétique H :

$$u_r = K \cdot H \quad \text{avec} \quad K = \frac{2\pi r \cdot a}{N_1}$$

30. On introduit l'admittance complexe $\underline{Y}_{//} = \frac{1}{R} + jC \cdot \omega$.

La loi des nœuds en terme de potentiel appliquée à l'entrée inverseuse s'écrit

$$\frac{u_e}{R} + \underline{Y}_{//} \cdot u_s = i^- = 0 \quad \text{donc} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = -\frac{1}{R \cdot \underline{Y}_{//}}.$$

On en déduit l'expression de la fonction de transfert du **filtre passe-bas du premier ordre** réalisé :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{1 + jR \cdot C \cdot \omega} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

L'identification avec la forme canonique d'un filtre passe-bas du premier ordre conduit à

$$H_0 = -1 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{R \cdot C}$$

31. La fréquence de coupure à -3 dB de ce filtre est $f_c = \frac{1}{2\pi R \cdot C}$.

Application numérique : $f_c = \frac{1}{2\pi \times 4,70 \cdot 10^5 \times 4,7 \cdot 10^{-8}} \approx \frac{2}{\pi} \times 10^1$ soit $f_c \approx 7 \text{ Hz}$.

Constatant que $f \approx 10 f_c$, le montage à ALi réalise approximativement une **fonction d'intégration** du signal d'entrée (comportement d'un intégrateur pur inverseur aux hautes fréquences).

La fonction de transfert est asymptotiquement approchée par $\underline{H}_{\text{as}}(j\omega) = \frac{-\omega_0}{j\omega}$. Alors dans le cadre de cette approximation : $\underline{u}_s = -\frac{1}{R \cdot C} \times \frac{1}{j\omega} \underline{u}_e$.

En passant en représentation temporelle instantanée : $u_s(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \int^t u_e(t') dt'$.

La formule du pont diviseur de tension permet d'établir un lien entre $u_e(t)$ et $u_2(t)$:

$$u_e(t) = \frac{R/11}{R + R/11} u_2(t) \quad \text{donc} \quad u_e(t) = \frac{1}{12} u_2(t)$$

Enfin, la loi de Faraday appliquée au bobinage du secondaire conduit à $u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{\overrightarrow{B_{\text{tot}} \rightarrow 1 \text{ spire}}}}{dt} = N_2 \cdot S \frac{dB(t)}{dt}$. Alors

$$u_s(t) = -\frac{N_2 \cdot S}{12 R \cdot C} B(t) \quad \text{avec} \quad \langle u_2(t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle B(t) \rangle = 0$$

Il y a bien **proportionnalité** entre la valeur du champ magnétique $B(t)$ et la tension $u_s(t)$:

$$B(t) = K' \cdot u_s(t) \quad \text{avec} \quad K' = -\frac{N_2 \cdot S}{12 R \cdot C}$$

Le montage 1 réalise un pont diviseur de tension afin d'envoyer en entrée de l'ALi une tension d'amplitude suffisamment faible pour **ne pas saturer l'ALi en tension de sortie**.

II.3- Couplage de la centrale hydraulique au réseau EDF

32. La célérité des ondes électrocinétiques dans un câble coaxial est $c_s \sim 1 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

À l'échelle d'un département, l'ordre de grandeur de la longueur d'une telle ligne est estimé à $L \sim 1 \cdot 10^5 \text{ m}$.

Le durée de propagation d'une onde électrocinétique est alors

$$\tau = \frac{L}{c_s} \quad \text{soit} \quad \text{Application numérique :} \quad \tau \sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ s} \ll T = \frac{1}{f_{\text{E.D.F}}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

L'approximation des régimes quasi-stationnaires est **validée** dans le cadre de cette étude.

33. Aux bornes d'une prise électrique standard, E.D.F délivre une tension sinusoïdale de fréquence $f_{\text{E.D.F}} = 50 \text{ Hz}$ et de **valeur efficace** $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$.

La **puissance moyenne absorbée** par une installation électrique a pour expression $\mathcal{P} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi)$. Elle porte également le nom de **puissance active**.

E.D.F réalise un transport de l'énergie électrique sous très haute tension et impose aux installations un facteur de puissance proche de l'unité afin de **réduire les pertes en ligne** donc d'**assurer un rendement de transfert de puissance de la centrale aux particuliers le plus élevé possible**.

Partie III- L'acier des conduites forcées

III.1- Corrosion des conduites forcées et protection

34. Le fer et l'eau possèdent des domaines de stabilité thermodynamiques disjoints quelle que soit la valeur du pH de la solution. Le fer métallique est donc **thermodynamiquement instable** au contact de l'eau.

Les domaines de passivation, d'immunité et de corrosion du fer :

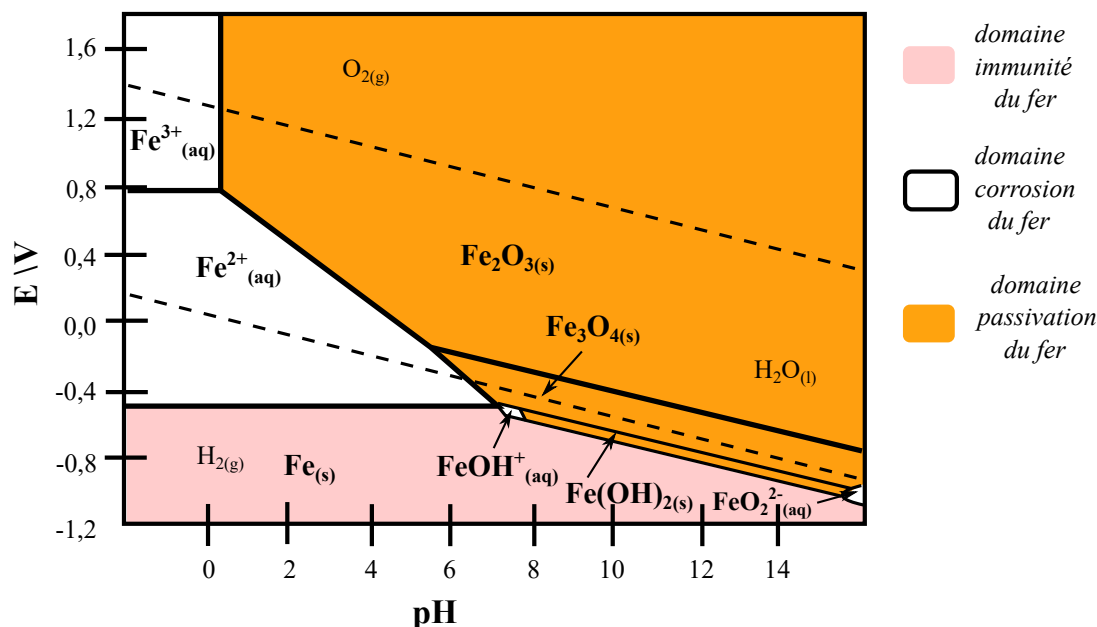
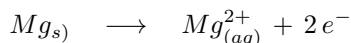


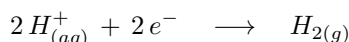
Figure 3 – Les domaines d'immunité, de corrosion et de passivation du fer

35. Le courant de corrosion est beaucoup plus important lorsque le magnésium est au contact du fer.

Le magnésium est préférentiellement oxydé selon



La réduction du proton de l'eau s'effectue sur électrode de fer selon :



Dans la construction graphique suivante, on néglige le courant d'oxydation du fer devant celui du magnésium.

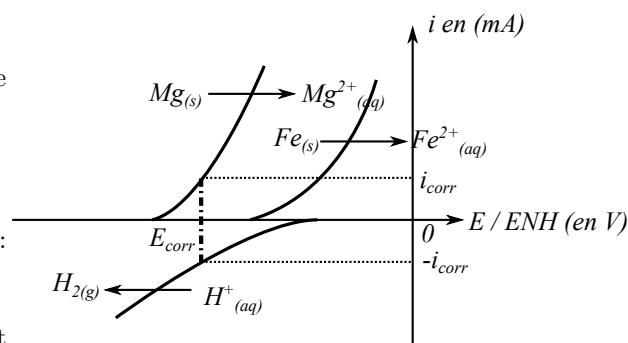


Figure 4 – Détermination graphique du courant de corrosion - Cas d'un sol de conductivité infinie

36.(*) Considérons une conduite de longueur ℓ , de diamètre D enterrée dans un sol de résistivité ρ_{sol} où la densité de courant nécessaire pour protéger le fer est $j = 11 \text{ mA} \cdot \text{m}^{-2}$.

L'intensité du courant électrique de corrosion a pour expression $i_{\text{corr}} = \pi j \cdot D \cdot \ell$.

$$i_{\text{corr}} = 3,14 \times 1,1 \cdot 10^{-2} \times 3,0 \cdot 10^{-1} \cdot 1,0 \cdot 10^2 \quad \text{soit} \quad i_{\text{corr}} = 1,0 \text{ A}$$

Une anode en magnésium de masse $m_{\text{électrode}}$ peut transférer la charge électrique totale $Q_{1 \text{ elec.}} = m_{\text{elec.}} \times Q_m$.

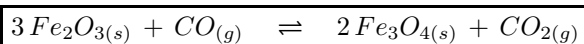
Application numérique : $Q_{1 \text{ elec.}} = 5,0 \times 1,1 \cdot 10^3 \times$ soit $Q_{1 \text{ elec.}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{h}$

Le nombre d'anodes de magnésium nécessaires pour protéger cette conduite en acier pendant une durée $\Delta t = 5 \text{ a}$ est alors

$$n = \left\lceil \frac{I_{\text{corr}} \cdot \Delta t}{Q_{1 \text{ elec.}}} \right\rceil \quad \text{soit} \quad \text{Application numérique :} \quad n = \left\lceil \frac{1,0 \times 5,0 \times 365 \times 24}{5,5 \cdot 10^3} \right\rceil = \left\lceil \frac{87,6}{11} \right\rceil = 8$$

III.2- Réduction des oxydes de fer par le monoxyde de carbone gazeux

37. L'équation de la réduction de l'oxyde $\text{Fe}_2\text{O}_{3(s)}$ par le monoxyde de carbone $\text{CO}_{(g)}$ est obtenue par combinaison linéaire $-[4] + [5]$. Ainsi



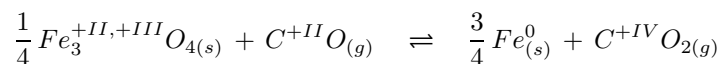
L'enthalpie libre standard associée à cette équation a pour expression $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r G_5^\circ(T) - \Delta_r G_4^\circ(T)$

soit

$$\Delta_r G^\circ(T) = -32,1 - 53,8 \cdot 10^{-3} T < 0$$

Dans le domaine de température considéré, $\Delta_r G^\circ(T) < 0$ donc $K^\circ(T) > 1$. La réaction de réduction de $Fe_2O_{3(s)}$ en $Fe_3O_{4(s)}$ est **thermodynamiquement favorisée**.

38. Considérons l'équation [a] :



Au-cours de cette réaction, le nombre d'oxydation moyen de l'élément fer **diminue** ; le nombre d'oxydation de l'élément carbone **augmente**.

Il s'agit bien d'une **réduction** de $Fe_2O_{3(s)}$ par le monoxyde de carbone $CO_{(g)}$.

Le système physico-chimique considéré est un système hétérogène constitué

- d'une **phase gazeuse** : mélange parfaits de gaz parfaits $CO_{(g)}$ et $CO_{2(g)}$;
- d'une **phase solide** constituée d'un corps pur seul dans sa phase $Fe_3O_{4(s)}$;
- d'une seconde **phase solide** constituée d'un corps pur seul dans sa phase $Fe_{(s)}$.

Les **paramètres intensifs de description** sont donc P , T , $x_{CO_{(g)}}$, $x_{CO_{2(g)}}$, $x_{Fe_3O_{4(s)}}$ et $x_{Fe_{(s)}}$.

Les **contraintes de définition** :

- $x_{CO_{(g)}} + x_{CO_{2(g)}} = 1$;
- $x_{Fe_3O_{4(s)}} = 1$ et $x_{Fe_{(s)}} = 1$;
- $Q_{r,eq} = K_a^\circ(T)$.

La variance associée à ce système est alors $v = 6 - 4 = 2$.

Remarque : la pression P n'est pas un paramètre d'influence ($\Delta\nu_{\text{gaz}} = 0$). Il faut donc l'imposer pour la connaître.

Le système est en **réalité monovariant** !

39. [a] est obtenue par combinaison linéaire $-[2] + [5]$. L'enthalpie libre standard associée à cette équation est alors $\Delta_r G_a^\circ(T) = \Delta_r G_5^\circ(T) - \Delta_r G_2^\circ(T)$

soit

$$\Delta_r G_a^\circ(T) = -9,6 + 8,6 \cdot 10^{-3} T$$

Comme $\ln \left(K_a^\circ(T) \right) = -\frac{\Delta_r G_a^\circ(T)}{R \cdot T}$, il vient

Application numérique : $\ln \left(K_a^\circ(T) \right) = \frac{9,6 \cdot 10^3}{8,31 T} - \frac{8,6}{8,31}$ soit $\ln \left(K_a^\circ(T) \right) = \frac{1155}{T} - 1,03$

40. Le quotient réactionnel associé à l'équation [a] a pour expression :

$$Q_{r,a} = \frac{(a_{Fe_{(s)}})^{3/4} \cdot a_{CO_{2(g)}}}{(a_{Fe_3O_{4(s)}})^{1/4} \cdot a_{CO_{(g)}}} \quad \text{soit} \quad Q_{r,a} = \frac{a_{CO_{2(g)}}}{a_{CO_{(g)}}}$$

Cette expression démontre bien que la pression P n'est pas un facteur d'équilibre. Aussi, une augmentation de pression sera **sans effet sur l'état d'équilibre**, tous les autres paramètres étant maintenus constants.

Sachant que $\Delta_r G_a^\circ(T) = \Delta_r H_a^\circ - T \cdot \Delta_r S_a^\circ$, il vient par identification $\Delta_r H_a^\circ = -9,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < 0$. La réaction est **exothermique**.

La relation de van't Hoff indique que $\frac{d \ln (K_a^\circ)}{R \cdot T^2} < 0$. Une augmentation de température **rend moins thermodynamiquement favorable** la réaction.

Aussi, à partir d'une situation initiale d'équilibre, une augmentation de température ($T_1 \rightarrow T_2$), tous les autres paramètres intensifs étant maintenus constants, entraîne le système dans un état hors d'équilibre $Q_{r,a} > K^\circ(T_2)$. Le système relaxe. L'état d'équilibre est alors déplacé dans le sens endothermique (Le Châtelier) ie. dans le **sens indirect** de l'écriture de l'équation de la réaction.

Remarque : on peut obtenir ici une rupture d'équilibre !

41. À l'équilibre à la température T :

$$Q_{ra,eq} = K^\circ(T) \quad \text{soit}$$

$$r_{eq} = \frac{P_{CO_{2(g)}}^{eq}}{P_{CO_{(g)}}^{eq}} = \exp\left(\frac{\Delta_r S^\circ}{R}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta_r H^\circ}{R \cdot T}\right)$$

où :

- $\Delta_r H^\circ = -9,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- $\Delta_r S^\circ = -8,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

À l'instant de date t , $r(t) > r_{eq}$. Par conséquent $Q_{ra} > K^\circ(T)$.

Le système est **hors d'état d'équilibre** et évolue spontanément dans le **sens indirect** de l'équation de la réaction.

- Fin -