

Rapport du jury - 2026 - PSI

Commentaires généraux

Moyenne : 5,95 et écart type : 2,78 sur 2801 copies.

Le sujet de cette année est composé de quatre exercices qui couvrent une bonne partie du programme des classes préparatoires : un exercice de recherche d'extremum d'une fonction à plusieurs variables, un exercice sur les suites réelles et séries de fonctions, un exercice d'algèbre linéaire et un exercice de probabilité.

Rappelons que :

- les questions préliminaires servent à aider le candidat dans sa recherche des solutions aux questions qui suivent : il est surprenant de constater que pour beaucoup de candidats, chaque question a sa vie propre, indépendante du reste de l'énoncé,
- les questions s'enchaînent et les résultats établis servent en général à traiter les questions suivantes,
- les énoncés des exercices sont parsemés de réponses afin de pouvoir avancer dans leur résolution : il n'est pas nécessaire de raconter n'importe quoi pour arriver de toute force au résultat annoncé,
- il n'est pas judicieux de changer l'énoncé proposé, par exemple en prenant des valeurs particulières,
- enfin, **une affirmation sans démonstration n'a aucune valeur.**

En conclusion, lire attentivement l'énoncé en étudiant toutes les interactions entre les questions reste d'une importance capitale pour réussir cette épreuve.

Il nous semble important de signaler le nombre grandissant de copies mal présentées (renumérotation des questions, jeu de piste pour suivre l'ordre de ces questions, etc...) , mal écrites, raturées dans tous les sens : cela démontre **un réel mépris du candidat vis à vis du correcteur**. Cela nous incite à introduire dans le barème un nombre non négligeable de points pour la présentation.

Rappelons qu'apprendre à rédiger correctement un problème de mathématiques et à bien présenter une copie en vue des concours nécessite un **entraînement** tout au long des deux années de CPGE.

- Force est de constater **des lacunes énormes et inquiétantes en algèbre linéaire** : les notions de base ne sont pas acquises du tout, même les plus simples telles : « écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée », « déterminer le rang d'une matrice dont tous les éléments sont des 1 ». On constate un joyeux mélange entre matrice symétrique, matrice inversible, matrice diagonalisable, matrice triangulaire, voire matrice « diagonale supérieure » ! La notion de « matrice symétrique définie positive » est totalement inconnue par la plupart des candidats.

Les valeurs propres d'une matrice M ne sont pas, contrairement à une croyance très répandue, les termes de la diagonale de cette matrice.

La plupart des candidats confondent « dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ » et « ordre de multiplicité de cette valeur propre ».

Les candidats n'hésitent pas à se contredire : « la matrice M est inversible » et deux lignes plus loin : « 0 est valeur propre de la matrice M » : **il serait judicieux de se relire avant de rendre sa**

copie. Par ailleurs, le lien entre « 0 valeur propre de M » et « M non inversible » semble inconnu de beaucoup.

Enfin, pour une partie non négligeable des candidats, bien que n soit un entier naturel supérieur ou égal à 2, les calculs sont faits avec $n = 2$, au mieux avec $n = 3$!

- Les fonctions à plusieurs variables restent souvent très mystérieuses :

— dériver par rapport à une variable est parfois un grand challenge,

— bien que l'énoncé demande de déterminer « le **vecteur** gradient », on lit : $\nabla f(m) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}$!

— la matrice Hessienne est $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$: encore une fois, $n = 2$ paraît beaucoup tenter les candidats.

- **Plus grave** : certains candidats n'arrivent pas à dresser le tableau de variation correct de la fonction $x \mapsto \ln\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ sur $[-1, 1]$.

Démontrer que $\left[-\ln(2), \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] \subset [-1, 1]$ est une épreuve impossible pour beaucoup.

Le résultat $|v_n| \leq k |v_{n-1}|$ avec $k \in]0, 1[$ ne permet pas d'affirmer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Trop d'étudiants confondent variations de f et variations de la suite (v_n) : si f est décroissante, alors la suite (v_n) est décroissante.

- En algèbre bilinéaire, démontrer que la forme bilinéaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 (1-t^2) P(t) Q(t) dt$ est définie devient une épreuve insurmontable : les quelques arguments indispensables à la conclusion sont souvent escamotés. On voit souvent : $(P|P) = 0 \implies P = 0$ grâce au « théorème de l'intégrale nulle ».
- Un nombre non négligeable de candidats ne savent pas résoudre $x^{11} - 1 = 0$, ce qui est inadmissible, et se demandent quel peut bien être le lien avec $\sum_{k=0}^{10} x^k = 0$.

Commentaires par exercice

Dans un souci d'aider les étudiants à préparer la prochaine session, nous signalons dans ce compte rendu les erreurs les plus répandues ou les plus grossières à ne pas commettre. Ces erreurs sont repérées par un • et retranscrites telles qu'elles ont été relevées dans les copies (avec les fautes, donc, aussi bien de mathématiques que de syntaxe).

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Questions préliminaires

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Écrire pour la fonction f , sans la redémontrer, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en un point a de $\mathbb{R}^n$.

La plupart des copies proposent (avec plus ou moins de bonheur) la formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction f d'une seule variable : la formule pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, bien que ce soit une question de cours, est très rarement citée.

- $f(x) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} + f(a) + o(a),$
- $f(a) = \sum_{k=0}^2 \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a),$
- $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_i) + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_i)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a_i) + o((x-a)^2).$

2. Soient $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1 et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1. Déterminer le rang de J .

Beaucoup d'imprécisions dans cette question pourtant facile.

- Les colonnes sont proportionnelles et donc, le rang vaut 1,
- la matrice J possède n lignes et n colonnes, elle est donc de rang n ,
- La matrice J est de rang 0 car toutes les colonnes sont combinaisons linéaires les unes des autres,
- $\text{rg}(J) = 1$ car toutes les colonnes de J sont les égaux,
- $\text{Ker}(J) = O_n$, $\dim(J) = n = \dim(\text{Ker}(J)) + \dim(\text{Im}(J))$ et donc, $\text{rg}(J) = \dim(\text{Im}(J)) = n$.

2.2. Justifier que 0 est valeur propre de J . Quel est son ordre de multiplicité ?

De façon étonnante, après avoir vu que le rang de J était égal à 1, la plupart des candidats redémontrent que 0 est valeur propre de J , certains tentant le calcul du polynôme caractéristique avec plus ou moins de bonheur.

La plupart des candidats confondent « ordre de multiplicité » et « dimension du sous-espace propre ». Quelques erreurs :

- Par le théorème spectral, J admet 0 comme valeur propre,
- λ est valeur propre de J si $\lambda J = 0$,
- 0 est valeur propre de J , car lors du calcul du polynôme caractéristique de J , les coefficients des 1 vont s'alterner et s'annuler entre eux,
- vu que $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, 0 est valeur propre de J ,

- $J \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc, 0 est une valeur propre de J ,
- En prenant X un vecteur quelconque, on a : $JX = 0$ et donc, 0 est valeur propre de J avec un ordre de multiplicité égal à 1,
- en développant beaucoup de fois chaque ligne et chaque colonne, on a : $\det(0 - J) = 0$ et donc, 0 est valeur propre de J ,
- λ est valeur propre de J si $JX = \lambda X$ et comme $J0 = \lambda 0$, on peut dire que 0 est valeur propre de J de multiplicité 1,
- $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \text{rg}(J) + \dim(\text{Ker}(J))$,
- $\text{rg}(J) < n \implies 0 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(J)$ avec un ordre de multiplicité égale à 0

2.3. Démontrer alors que la matrice $I_n + J$ est symétrique réelle définie positive.

Question très mal traitée : rappelons qu'une matrice symétrique réelle dont tous les coefficients sont positifs n'est pas forcément définie positive.

D'autre part, trop peu de candidats, ayant les valeurs propres de J sont capables d'en déduire les valeurs propres de $I_n + J$!

Enfin, l'énoncé dit : « Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 » : cela ne signifie pas que $n = 2$!

Quelques erreurs :

- la matrice $I_n + J$ est scindée à racines simples sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle est diagonalisable, c'est-à-dire qu'elle est symétrique réelle définie positive.
- $\text{Sp}(I_n + J) = \{-1, 2 + n\} \subset \mathbb{R}_+$,
- d'après le théorème spectral, toute matrice réelle symétrique possède des valeurs propres strictement positives,
- $A = I_n + J : \text{tr}(A) = \text{tr}(I_n) + \text{tr}(J) = I_n + J = A$ et donc, A est symétrique. Comme ses coefficients sont réels, elle est positive.

* * * * *

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(m) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k,$$

c'est-à-dire :

$$f(m) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Très peu de justification correcte : « f est la somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ », ou bien « chacune des composantes de f est de classe $\mathcal{C}^2$ » !

- La fonction f étant la formule de Taylor à laquelle on y retire la somme des coordonnées, on obtient bien une fonction de classe $\mathcal{C}^2$,

- soit F l'unique primitive qui s'annule en 0 de f telle que $F'(m) = f(m)$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, f est C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{F}$ l'unique primitive qui s'annule en 0 de F telle que $\mathcal{F}'(m) = F(m)$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et ainsi, f est C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

4. Soit $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4.1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}(m)$.

La plupart du temps, cette question et les deux suivantes sont bien traitées.

4.2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(m)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(m)$.

4.3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(m)$.

5. Déterminer le vecteur gradient $\nabla f(m)$ de f au point $m = (x_1, \dots, x_n)$.

La stupeur de constater la méconnaissance très répandue de la définition du **vecteur gradient**, qui pourtant est un outil banal de la physique : $\nabla f(m) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(m)$.

6. Déterminer le seul point critique $a = (a_1, \dots, a_n)$ de f dans $\mathbb{R}^n$.

Calculs forcément faux après le résultat obtenu à la question précédente.

7. Soit $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

7.1. Déterminer la matrice Hessienne $H_f(m)$ de f .

La matrice $H_f(m)$ n'est pas une matrice 2×2 .

$$\bullet H_f(m) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2(x_2 + \dots + x_n) - 1 & \dots & 4x_n + 2(x_1 + \dots + x_{n-1}) - 1 \\ 4 & \text{-----} & 4 \end{pmatrix}.$$

7.2. Déterminer le spectre de $H_f(m)$.

D'énormes calculs qui aboutissent rarement pour tenter de déterminer le polynôme caractéristique de $H_f(m)$.

Et pour ceux qui ont trouvé le bon résultat, les questions précédentes semblent avoir leur vie propre.

- $H_f(m)$ est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, $\text{Sp}(H_f(m)) \subset [-1, 1]$,

8. Montrer que f admet un extremum local en a et préciser sa nature et sa valeur.

Question rarement traitée.

EXERCICE 2

On définit, lorsque cela est possible, la suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 \in [-1, 1] \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln \left(1 - \frac{1}{2} v_n \right) \end{array} \right.$$

1. Étude de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1.1. Dresser le tableau de variations sur $[-1, 1]$ de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$.

En particulier, on déterminera les deux réels a et b tels que $f([-1, 1]) = [a, b]$.

Étonnant de constater que certains candidats ne savent pas étudier cette fonction, ou qui trouvent

$$[a, b] = \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right), -\ln(2) \right] !$$

L'étude est souvent mal rédigée et incomplète.

- f est définie sur $[-1, 1] \subset]-1, 1[$,
- $f'(x) = \frac{x}{x-2}$ ou $f'(x) = -\frac{1}{x}$.

1.2. Justifier que $[a, b] \subset]-1, 1[$.

Catastrophique : comparer 2 et $\frac{3}{2}$ à e est parfois impossible.

Par exemple :

- D'après le Lemme : ($\exists I \in \mathbb{R}$ et J un autre intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f(I) = J$, alors $J \subset I$), on a : $[a, b] \subset]-1, 1[$,
- d'après le théorème de la partie stable, $v_0 \in [-1, 1]$,
- $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \subset]-1, 1[$,
- $-1 < \ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq x \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1$.

1.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien défini et que $v_n \in [a, b]$.

Il semble que la notion d'intervalle stable soit trop souvent oubliée.

Sinon, rappelons que l'argument : « par une récurrence évidente » ne prouve rien.

1.4. Démontrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq k$.

Question très mal traitée : la majoration d'un quotient reste souvent une épreuve insurmontable.

1.5. Prouver alors que pour tout entier $n \geq 2$, $|v_n| \leq k \times |v_{n-1}|$.

L'inégalité des accroissements finis n'apparaît que très rarement.

1.6. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

La décroissance / croissance de la suite $|v_n|$ n'implique pas en général celle de la suite (v_n) .

Étrange de vouloir appliquer le critère de d'Alembert pour une question qui ne traite pas des séries !

Régulièrement, une confusion est réalisée entre les variations de f et celles de la suite (v_n) .

2. Étude d'une série de fonctions

On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[-1, 1]$ par :

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}u_n(x)\right) \end{cases}$$

Prouver que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.

Question très rarement abordée.

EXERCICE 3

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k(X) = X^k$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E_n .

On note Φ l'application qui à tout polynôme P de E_n associe :

$$\Phi(P) = ((X^2 - 1)P)'' = (X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P.$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E_n .

Beaucoup de candidats ne savent pas qui est $\mathbb{R}_n[X]$ et prétendent que tous ses éléments sont de degré n : inadmissible.

La linéarité est en général bien traitée mais le reste très approximatif.

- Φ est bien un sous-espace vectoriel de E_n ,
- Φ est strictement monotone donc, $\Phi(E_n) \subset E_n$,
- on vérifie que $\dim(\Phi(P)) = \dim(E_n)$,
- $\deg(\Phi(P)) \leq \deg((X^2 - 1)P'') + \deg(4XP') + \deg(2P) \leq 3n$ et donc, $\deg(\Phi(P)) \leq n$,
- $\deg(P) = \deg(E_n) = \deg(\mathbb{R}_n[X])$ et $\deg(\Phi) = \deg(P) = \deg(E_n)$. Ainsi, Φ est un endomorphisme de E_n .

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $\Phi(P_k)$.

L'expression de $\Phi(P_k)$ obtenue n'est pas souvent exprimée correctement dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

- $((X^2 - 1)P_k)'' = (P_k(X^2) - P_k(1))$,
- $\Phi(P_0) = 2P_0, \Phi(P_1) = 2P_1, \dots, \Phi(P_n) = 2P_n$.

3. Déterminer la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

On explicitera soigneusement les trois premières colonnes et, en fonction de j , une j -ième colonne de la matrice M , avec $j \in \llbracket 3, n+1 \rrbracket$.

Certains candidats ne respectent pas la consigne. C'est dommage.

D'autres, trop nombreux, font encore apparaître des X dans la matrice !

Sans parler du décalage : la colonne j correspond à $\Phi(P_{j-1})$, rarement vu.

Il est tout de même étonnant qu'après deux années de classes préparatoires, des étudiants ne sachent toujours pas écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.

4. Montrer que Φ admet $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes notées : $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

Les $n + 1$ valeurs propres apparaissent mais le fait qu'elles soient deux à deux distinctes est rarement correctement traité.

On constate souvent un doux mélange entre matrice triangulaire et matrice diagonalisable.

- Une matrice qui est de rang $n + 1$ et de dimension $n + 1$, admet $n + 1$ valeurs,
- la matrice M étant triangulaire supérieure, elle est diagonalisable et a pour valeurs propres les éléments de sa diagonale (théorème spectral),
- M est une matrice triangulaire donc sa diagonale son ces valeur propre or d'après la formule $k^2 + 3k + 2$ nous montre la « distingité » de chaque valeur propre est puisque $M = \text{Mat}(\Phi)$ de $\dim(M) = n + 1$ donc Φ admet $n + 1$ valeur propre deux à deux distincts.

5. L'endomorphisme Φ de E_n est-il un automorphisme de E_n ?

Rares sont les candidats qui utilisent la question précédente et de façon générale, très peu de bonnes réponses à cette question pourtant relativement facile.

Affirmer, comme s'il s'agissait d'une évidence, que l'équation $(X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P = 0$ n'admet comme solution que le polynôme nul n'est pas très convaincant.

- Φ admet $n + 1$ racines. Elle est donc bijective. De plus, $\deg(\Phi) = n$ et Φ admet $n + 1$ racines distinctes et $\dim(E_n) = n$: donc Φ est bijective,
- un endomorphisme est aussi un isomorphisme et un automorphisme, donc oui,
- on sait que si $0 \in \text{Sp}(M_\Phi)$, alors (M_Φ) est inversible. Or, $0 \notin \text{Sp}(M_\Phi)$, donc (M_Φ) n'est pas inversible,
- en dimension finie, on a : (endomorphisme $\iff$ isomorphisme $\iff$ automorphisme),
- Φ admet $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes, ainsi chaque élément de Φ dans E_n admet un unique élément et Φ est bijective,
- non, Φ n'est pas un automorphisme de E_n , car sinon, 0 serait valeur propre de Φ , ce qui n'est pas le cas,
- $\Phi(0) = 0$ et donc, Φ est injective,
- $P \in \text{Ker}(\Phi) \implies \Phi(P) = 0 : (X^2 - 1)P'' = 0$ et $4XP' = 0$ et $2P = 0$ et donc, $P = 0$,
- par argument de dimension, la bijectivité de Φ est assurée,
- pour que Φ soit un automorphisme, il faut que $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$. Or $\text{Ker}(M) = E_0$ et 0 n'est pas valeur propre de M (car la plus petite valeur propre de M est $\lambda_0 = 2$) et donc, Φ n'est pas un automorphisme,
- Φ n'est pas bijectif car 0 n'est pas valeur propre de Φ ,
- E_n est un automorphisme car $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X] = (1, X, \dots, X^n)$ donc E_n est une famille échelonnée à degré donc libre On est en dimension finie donc $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille bijectif donc E_n est un automorphisme.

6. Vérifier que Φ est diagonalisable et déterminer la dimension de ses sous-espaces propres.

Étonnant de devoir déterminer les sous-espaces propres sans utiliser les questions précédentes.

- toute matrice diagonale n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais diagonalisable sur $\mathbb{C}$,

- une matrice triangulaire supérieure devient dans la même copie symétrique réelle : « Φ est symétrique réel d'après le théorème spectral Φ est diagonalisable »,
- M est triangulaire supérieure, donc diagonalisable et les λ_f sont de dimension 1.

7. Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et T un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k .

7.1. Montrer que le degré de T est égal à k .

Très rarement traitée correctement :

- Le degré de T est forcément égal à k

7.2. Montrer que le polynôme Q défini par : $Q(X) = T(-X)$ est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k .

Très peu de candidats pensent à montrer que $\Phi(Q) = \lambda_k Q$ en ayant posé $Q(X) = T(-X)$.

8. Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{U} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ de E_n constituée de vecteurs propres de Φ , telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, Q_k est un polynôme unitaire de degré k et vérifie :

$$Q_k(-X) = (-1)^k Q_k(X).$$

Question en général sabotée.

9. Que peut-on en déduire sur la parité des polynômes Q_k ?

Question réussie !

- Q_k est à la fois paire et impaire.

10. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Justifier que $(Q_0, Q_1, \dots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

Très peu de copies rédigent bien cette question du niveau de première année.

- Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. $(Q_0, \dots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ par le lemme des « coallitiens » car $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

11. Calculer Q_k pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

La réponse la plus fréquente : $Q_0(-X) = Q_0(X)$, $Q_1(-X) = Q_1(X)$, $Q_2(-X) = Q_2(X)$, $Q_3(-X) = Q_3(X)$!

12. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^1 (1 - t^2) P(t) Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur E_n .

Le cours fait clairement défaut sur cette question.

13. On munit alors E_n de ce produit scalaire.

13.1. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $(E_n, (|))$.

On pourra intégrer par parties.

Le calcul est moins aisé en prenant $\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P$ au lieu de $\Phi(P) = ((X^2 - 1)P)''$, malgré l'indication de l'énoncé !

13.2. Montrer que la base $\mathcal{U}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(|)$.

On pourra calculer pour $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, le produit scalaire $(\Phi(Q_i)|Q_j)$.

Peu réussi, surtout pour les candidats qui reviennent à la définition intégrale du produit scalaire.

- Une base est orthogonale si, et seulement si, son produit scalaire est nul.

14. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que : $\forall S \in \mathbb{R}_{j-1}[X], (S|Q_j) = 0$.

Question bien traitée lorsque c'est le cas.

EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

Questions préliminaires

1. Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.

Question assez mal traitée et rarement abordée. Les erreurs les plus fréquentes :

- Un polynôme de degré impair n'est pas forcément un polynôme impair,
- Si cela marche pour un polynôme de degré 1, cela marche pour tous les polynômes de degré impair,
- l'argument à coefficients réels est rarement invoqué lorsque les racines complexes sont groupées deux à deux,
- d'après le cours, si P est impair, -1 ou 1 est racine,
- soit $P \in \mathbb{R}[X] : P(x) = \sum_{k=0}^n X^{k+1} = X \sum_{k=0}^n X^k = X \sum_{k=0}^n X^{\frac{2k}{2}} = X \sum_{k=0}^n \sqrt{X^{k^2}}$ et donc, on peut factoriser par X lorsque le polynôme est de degré impair : il possède au moins une racine réelle.

2. Déterminer les racines complexes du polynôme $X^{11} - 1$.

Il est inadmissible d'obtenir des réponses de cette sorte sur cette question :

- les racines sont $\{-i, 1\}$,
- les racines sont : $\frac{j b \sqrt{-1}}{2}$, sans savoir qui est b ,
- $X^{11} = 1 \iff X^2 = -1 \iff (X = i \text{ ou } X = -i)$,
- les racines sont : $\{-i, (i)^{1/3}, (i)^{1/5}, (i)^{1/7}\}$,
- $X^{11} - 1 = 0 \iff X = e^{\frac{2\pi n^2}{11k}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,
- les racines unitaires de X^{11} sont les $r_k = e^{\frac{i11\theta}{k}}, k \in \llbracket 1, 11 \rrbracket$.

3. En déduire les racines complexes du polynôme $1 + X + X^2 + \dots + X^{10} = \sum_{k=0}^{10} X^k$. Justifier qu'aucune n'est réelle.

Question très rarement traitée : l'égalité $X^{11} - 1 = (X - 1)(X^{10} + X^9 + \dots + X + 1)$ est inconnue de la plupart des candidats.

- $X^{11} - 1 = X^{11}(1 + X + \dots + X^{10})$, donc les racines du polynôme $\sum_{k=0}^{10} X^k$ sont les mêmes que celles du polynôme $X^{11} - 1$.

Soient U et V les variables aléatoires de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ correspondant chacune au lancer d'un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, pas forcément équilibré, les lancers étant indépendants. On suppose que chaque face de chaque dé possède une probabilité non nulle d'apparition. Enfin, on note $S = U + V$.

4. Déterminer les valeurs prises par les variables aléatoires U , V et S .

Dire que $U = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ ou $\Omega(U) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ n'a aucun sens.

- $S(\Omega) = \llbracket 1, 12 \rrbracket$,
- $U = \{1, 3, 5\}$, $V = \{2, 4, 6\}$ et $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On suppose que S suit une loi uniforme.

5. Démontrer que la fonction génératrice G_S de S est une fonction polynomiale que l'on déterminera.

- $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(U + V = 1) = \mathbb{P}(U = 1) + \mathbb{P}(V = 1)$ par indépendances des lancers et donc des variables aléatoires, et $\mathbb{P}(S = 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Et donc, $\mathbb{P}(S = n) = \sum \mathbb{P}(U = n) + \mathbb{P}(V = n)$,
- $G_S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{n}$ car S suit une loi uniforme, soit $G_S = \ln(1 - t)$ par un développement en série entière.

La définition de fonction polynomiale n'est pas connue de tout le monde.

La loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$ pose problème à nombre de candidats : $\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{12}$!

6. Déterminer les racines de G_S dans $\mathbb{C}$.

Pas de souci sur cette question.

7. Soient G_U et G_V les fonctions génératrices des variables aléatoires U et V .

Déterminer un polynôme Q (respectivement R) dont les coefficients dépendent de la loi de la variable aléatoire U (respectivement de la variable aléatoire V), vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_U(t) = t Q(t) \text{ et } G_V(t) = t R(t).$$

Pas de remarque particulière sur cette question.

8. Démontrer que les polynômes Q et R possèdent chacun au moins une racine réelle.

On pourra utiliser une des questions préliminaires.

Bien traitée.

9. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, G_S(t) = t^2 Q(t) R(t)$.

L'indépendance est souvent oubliée.

10. Établir une contradiction qui démontre que la supposition encadrée est fausse.

On pourra utiliser une des questions préliminaires.

Beaucoup de baratin dans ces deux dernières questions. Par exemple :

- Les racines de $G_S(t)$ sont imaginaires, impliquant donc que la probabilité de tiré chaque nombre est imaginaire, or S soit une loi uniforme donc se n'est pas le cas, contradiction.

11. *Est-il possible de truquer deux dés à six faces de façon à ce que la somme des résultats obtenus au cours de lancers suive une loi uniforme ?*

Des réponses parfois étranges :

- En mettant la même valeur sur toutes les faces, la somme des résultats obtenus est forcément la même tout le temps. On aurait ainsi une loi uniforme.

Luc Valette.